GIOCHI ED EQUILIBRIO DI NASH

–

Ricordiamo il Teorema di esistenza dell'equilibrio di Nash, in una forma semplificata (perchè è la versione che usiamo nei nostri giochi) e la nozione di equilibrio di Nash:

Definizione Dato un gioco $G = (X, Y, u_1, u_2)$ a due giocatori,un profilo di strategie $(x^*, y^*) \in X \times Y$ dicesi un equilibrio di Nash (per brevità scriveremo NE) se valgono le seguenti diseguaglianze:

1) $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*)$ $\forall x \in X$

2) $u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y)$ $\forall y \in Y$

in altre parole x^* è la miglior risposta del giocatore I alla strategia $y*$ del giocatore II e viceversa $y*$...

Teorema *Ogni gioco finito ha almeno un equilibrio di Nash in strategie miste.*

Intanto dobbiamo specificare che per gioco finito intendiamo un gioco in cui il numero dei giocatori è finito e lo spazio delle strategie è un insieme finito.
A questo punto mi aspetto una domanda dagli studenti svegli:- Come è possibile che ci siano un numero infinito di giocatori?-
Nella realtà questo non è possibile ma in una teoria matematica il concetto di infinito deve essere preso in considerazione (pensate ai limiti all'infinito, li farete), l'idea è capire cosa succede se il numero dei giocatori diventa molto ma molto grande (analogamente per le strategie).
Va detto che noi tratteremo solo giochi finiti.
Ricordate il gioco del PARI/DISPARI? Abbiamo già visto che non ha NE in strategie pure.
In strategie miste Nash ci dice che ha almeno un equilibrio.

Gioco del Pari/Dispari

	P	D
P	1	-1
D	-1	1

Supponiamo che il giocatore I giochi la strategia P(Pari) con probabilità p e quindi la strategia D (dispari)con probabilità $1-p$; il giocatore II giochi la strategia P con probabilità q e la strategia D con probabilità $1-q$, dimostriamo che il gioco del Pari/Dispari ha un equilibrio di Nash in strategie miste dato da $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Chiamiamo $u(.,.)$ la funzione di utilià del giocatore I ovviamente la funzione di utilità del giocatore II sarà $-u(.,.)$.
Indichiamo con $\tilde{u}(.,.)$ l'estensione della funzione di utilità del giocatore I allo spazio delle distribuzioni delle probabilità su $X \times Y$. $(\Delta(X) \times \Delta(Y).)$.
Risulta

3) $\tilde{u}(p,q) = pq + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q) = 4pq - 2p - 2q + 1$

Dalla definizione di equilibrio di Nash devo dimostrare che:

4) $\tilde{u}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \geq \tilde{u}(p, \frac{1}{2}) \ \forall p \in \Delta(X)$

5) $\tilde{u}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \geq \tilde{u}(\frac{1}{2}, q) \ \forall q \in \Delta(Y)$

La dimostrazione è banale sostituendo $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nelle 4) e 5), in realtà, poichè il gioco è a somma zero, è sufficiente la prima disuguaglianza.