

## GIOCHI, STRATEGIE DOMINATE e CONOSCENZA COMUNE

C'è un modo ovvio per predire come saranno giocati i seguenti giochi?

### Example 1

	D	E	F
A	4 3	5 1	6 2
B	2 1	8 4	3 6
C	3 0	9 6	2 8

Fissiamo la nostra attenzione sul giocatore II.

La strategia F dà al giocatore II un payoff strettamente migliore del payoff dato da E; diciamo allora che la strategia E è strettamente dominata da F. Se il giocatore I sa (intuisce, capisce... essendo un giocatore razionale) allora per I la miglior risposta è A.

Infine se il giocatore II sa che I sa che che II non giocherà E, allora II sa che I giocherà A e allora II giocherà D. Otteniamo così (A,D) come unico equilibrio di Nash del gioco.

Questo processo dicesi anche di *dominanza stretta iterata* e non dipende dall'ordine in cui le strategie sono considerate.

### Example 2-Common knowledge

	C	D
A	8 10	-100 9
B	7 6	6 5

Quando un gioco si può giocare mediante eliminazione iterata di strategie dominate, nel senso che a ciascun giocatore rimane solo una strategia, allora questo *profilo di strategie* è il candidato ovvio per predire come sarà giocato

il gioco.

Non è però sempre così, specialmente quando i payoff possono assumere valori molto grandi o molto piccoli.

La maggior parte degli studenti a cui è stato chiesto come avrebbero giocato questo gioco, ha risposto B come strategia per I sebbene la dominanza iterata dia (A,C) come unica soluzione.

Infatti sebbene A è meglio di B quando II non usa la strategia dominata D, B è meglio di A quando c'è una possibilità che II giochi D.

Se la perdita è meno grave, ad esempio sostituendo -100 con -1 allora quasi tutti i giocatori I preferiscono A. Provate infatti a proporre agli stessi studenti il seguente gioco:

	C	D
A	8 10	-1 9
B	7 6	6 5

Questo esempio illustra il fatto fondamentale che i payoff e gli spazi delle strategie siano *conoscenza comune* e la razionalità nel senso di NON GIO-CARE UNA STRATEGIA STRETTAMENTE DOMINATA È CONOSCENZA COMUNE (apparentemente non sembrava vero nell' esempio dove compare un payoff molto piccolo)

### Example 3

Come giocheresti il seguente gioco?

	D	E
A	2 2	5 1
B	3 4	4 2
C	2 1	3 4

## QUIZ ed ENIGMI

### 1. Le 3 signorine con la faccia sporca

Supponiamo che tre ragazze tutte con la faccia sporca siano sedute in modo da vedere ciascuna la faccia delle altre.

Supponiamo inoltre che le tre ragazze siano perfettamente razionali (come tutti i giocatori della TdG) e ciascuna sa che tutte le altre sono perfettamente razionali. In altre parole la razionalità di tutte è conoscenza comune. Supponiamo che dato che queste ragazze sono razionali, arrossiscono appena si rendono conto di avere la faccia sporca. (Possiamo supporre che arrossiscono se e solo se si rendono conto di avere la faccia sporca, cioè nessun altro motivo può farle arrossire)

Osserviamo che:

- 1) Ciascuna ragazza vede le altre quindi ognuna sa che almeno una di esse ha la faccia sporca
- 2) non ci sono specchi di nessun tipo quindi nessuna ragazza può vedere se ha la faccia sporca. fin qui nessuna ragazza ha motivo di arrossire.

Supponiamo ora che una quarta persona entri nella stanza e fa a voce alta la seguente osservazione:

”Almeno una ragazza in questa stanza ha la faccia sporca”

Sembrerebbe che il nuovo arrivato non dica nulla di nuovo (la situazione era già nota a tutti) ma in realtà la situazione è cambiata.

Perchè?

Perchè l'annuncio mette a conoscenza le ragazze del fatto che tutte e tre sono a conoscenza del fatto che almeno una di loro ha la faccia sporca.

Ciò ha delle conseguenze?

Chiamiamo le tre ragazze Amelia, Barbara, Carlotta.

Mettiamoci dal punto di vista di Amelia (ma la situazione è simmetrica per

le altre).

Amelia pensa: se io ho la faccia pulita, Barbara e Carlotta osservano ciascuno una sola faccia sporca. Quindi se ad esempio Carlotta non arrossisce, Barbara sa di avere la faccia sporca. Carlotta non arrossisce quindi presto Barbara saprà con certezza che le facce sporche sono almeno due e, nel caso che la faccia di Amelia sia pulita arrossirà. Poichè Barbara non arrossisce, Amelia pensa che le facce sporche sono tre, quindi arrossisce. Poichè il ragionamento è simmetrico per le tre amiche, tutte arrossiranno.

Concludendo possiamo dire che la conoscenza comune ha permesso un passaggio di informazioni "silenzioso" conseguenza del comportamento di ognuna.

## 2. Un padre burlone

Un padre offre ai suoi due figli una busta ciascuno. In una ci sono  $10^n$  euro e nell'altra  $10^{n+1}$  ( $n$  è un numero intero scelto con la stessa probabilità tra 1 e 5 e i figli sanno questo).

Le buste vengono date a caso.

Il primo figlio, chiamiamolo Giovanni, scopre di aver ricevuto  $10^4$  euro e il secondo figlio, chiamiamolo Luca, scopre di aver ricevuto  $10^5$  euro. Ognuno non sa cosa ha ricevuto l'altro.

A questo punto il padre chiede separatamente a ciascun figlio se vuole scambiare la busta con quella del fratello. Facciamo l'ulteriore ipotesi che ciascuno sia indifferente al rischio e entrambi sono giocatori razionali pertanto cercheranno di massimizzare il propriopayoff atteso. Giovanni che ha ricevuto  $10^4$  euro, sa che Luca potrebbe aver ricevuto  $10^3$  euro oppure  $10^5$  pertanto si calcola la sua utilità attesa se scambiasse la busta (per fortuna ha sempre studiato bene la Matematica) e ottiene:

$\frac{10^3+10^5}{2}$  euro.

Essendo  $\frac{10^3+10^5}{2} > 10^4$  (provate!!!), sicuramente accetta.

Luca (che ha ricevuto  $10^5$  euro, pensa analogamente che il fratello Giovanni potrebbe aver ricevuto  $10^4$  euro oppure  $10^6$  euro, pertanto anche Luca, sapendo per fortuna un po' di Matematica riesce a calcolare la sua utilità attesa se cambiasse la busta :  $\frac{10^4+10^6}{2}$  euro.

Luca osserva che:  $\frac{10^4+10^6}{2} > 10^5$  (ancora una volta la Matematica viene in aiuto) e Luca conclude che anche a lui conviene accettare e cambiare la busta.

A questo punto il padre comunica ai due figli che entrambi hanno accettato di cambiare la busta.

Ora senza che avvenga alcuno scambio ripete come prima separatamente a entrambi la stessa domanda.

Ma questa volta Giovanni accetta, Luca no

Perchè?

Perchè Luca ha capito che nella busta di Giovanni ci sono  $10^4$  euro, infatti venendo a conoscenza del fatto che il fratello vuole cambiare la busta, necessariamente non ha trovato il massimo cioè  $10^6$  euro.

Anche in questo caso la "conoscenza comune" ha permesso un passaggio di informazioni silenzioso.