Giochi a somma zero :un gioco con le carte

Il seguente gioco è un gioco a somma zero cioè rientra in quella classe particolare di giochi in cui un giocatore vince e l'altro perde (cosa che nella realtà non avviene quasi mai, ognuno guadagna qualcosa) da notare che in questo gioco l'utilità attesa coincide con il guadagno atteso, anche questo è un caso particolare.
Esempi per illustrare che l'utilità attesa è ben diversa dal guadagno atteso se ne possono fare tantissimi: sono più contento se guadagno 10 euro e sono povero di quanto lo sia se guadagno la stessa cifra e sono molto ricco... Invitare i ragazzi a fare altri esempi mettendo in luce che :

UTILITÀ ATTESA $\neq$ GUADAGNO ATTESO.

Descriviamo il gioco:

– Entrambi i giocatori mettono una moneta di 1 euro nel piatto e il giocatore I pesca una carta senza mostrarla al giocatore II, la guarda e decide se rilanciare (azione R) o fermarsi (azione F). Se rilancia deve mettere 1 euro nel piatto e il gioco passa al giocatore II che dovrà scegliere tra vedere (azione V) e non vedere (azione N). Per vedere deve aggiungere un altro euro nel piatto. Se I si ferma vince il piatto solo se la carta pescata è rossa altrimenti perde.
Se I rilancia, vince il piatto solo se la carta pescata sia rossa oppure se II decide di non vedere.
Allora il gioco ha due giocatori: I e II e questi hanno come spazi delle azioni: $A_1 = \{N, V\}$ e $A_2\{F, R\}$ rispettivamente.

Qui metterei l'albero del gioco come in Lucchetti.

Le strategie sono date da: $S_2 = \{N, V\}$ per il giocatore II e
$S_1 = \{FF, FR, RF, RR\}$ per il giocatore I, dove la prima lettera sta a indicare cosa fa I se la carta è rossa e la seconda lettera cosa fa I se la carta è nera. Allora se indichiamo con
$u_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$
e
$u_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$
le funzioni di utilità rispettivamente dei due giocatori possiamo descrivere il gioco dato dalla quadrupla:

$G = (S_1, S_2, u_1, u_2)$
(ricordare che un gioco è descritto solo quando sono dati gli spazi delle strategie e le funzioni di utilità).
A questo punto con facili conti si ottiene la seguente matrice 4×2
che rappresenta il gioco in forma strategica.

	N	V
FF	0	0
FR	1	-1/2
RF	0	1/2
RR	1	0

infatti:
$u_1(RF, N) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$

$u_1(RF, V) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$

$u_1(RR, N) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1$

$u_1(RR, V) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(-2) = 0$

$u_1(FF, N) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$

$u_1(FF, V) = 0$

$u_1(FR, N) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1$

$u_1(FR, V) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-2) = -\frac{1}{2}.$

Ricordando che in un gioco a somma zero $u_2 = -u_1$ sono noti anche i payoff di II. Con considerazioni più volte usate sulla miglior risposta si conclude che non esistono equilibri di Nash.