Anno scolastico 2006 – 07
I.M.S. “Sandro Pertini” – Genova

Progetto didattico culturale

Docente progettista Angela Berto

Traccia di sviluppo con i relativi tempi (totale ore 20)[1]

Tappa 1 (1 ora)
Lo spunto iniziale è stato lo studio dei dati riguardanti la magnitudo dei terremoti registrati da un sismografo di Wood-Anderson secondo la scala Richter.

Magnitudo di un terremoto. Nella definizione data da Richter, la magnitudo M_L di qualsiasi terremoto è data dal logaritmo della massima ampiezza della traccia con cui un sismografo a torsione di Wood-Anderson calibrato in maniera "standard" (cioè con amplificazione 2.800 volte, periodo proprio 0,8 secondi, costante di smorzamento 0,8) registrerebbe l'evento se questo si fosse verificato a una distanza epicentrale di 100 km.

Per i terremoti a 100 km di distanza, la formula è dunque:

$$M_L = \log A$$

dove ML è appunto la magnitudo Richter, o magnitudo locale, ed A è l'altezza massima della sinusoide sul sismogramma da 0 fino al picco, in mm.
La magnitudo di terremoti che avvengono a distanze epicentrali diverse da 100 km può essere calcolata solo se si conosce la legge di attenuazione dell'ampiezza delle onde sismiche con la distanza epicentrale.

È stata presentata una serie di dati, come esemplificato nella tabella sottostante, dove nella prima colonna si trovano i rapporti X tra le ampiezze registrate dal sismografo e l’ampiezza del terremoto campione, mentre nella seconda si trovano le magnitudini Y corrispondenti.

X	Y
10^1 =10,00	1
$10^{3/2}$ =31,62	1,5
10^2 =100,00	2
$10^{5/2}$ =316,23	2,5
10^3 =1000,00	3
$10^{7/2}$ =3162,28	3,5
10^4 =10000,00	4
$10^{9/2}$ =31622,78	4,5
10^5 =100000,00	5

Una volta acquisiti i dati, i ragazzi sono stati indotti a riconoscere che la prima serie è una progressione geometrica, mentre la seconda è una progressione aritmetica. Si sono invitati poi i ragazzi a tracciare, mediante l’uso di Excel, il grafico che meglio li approssima. In particolare è stato suggerito di provare l’andamento lineare, quello polinomiale, quello esponenziale e quello logaritmico.

[1] I tempi indicati si riferiscono alle sole ore utilizzate in classe

È risultato evidente che l'andamento migliore è quello logaritmico, preparando il terreno per la definizione di tale funzione.
Fornita un'ulteriore ascissa, è stato richiesto di ipotizzare il valore dell'ordinata corrispondente. Per passi successivi i ragazzi si sono accorti che il valore cercato è proprio l'esponente da dare alla ragione della progressione geometrica per ottenere l'ascissa data.
A questo punto è stato introdotta facilmente la definizione di logaritmo e, poiché la trasformazione considerata trasforma processi geometrici in processi aritmetici, il logaritmo si è candidato come la funzione inversa dell'esponenziale. È stata denotata perciò $y = \log_a x$ la funzione logaritmica.

Tappa 2 (5 ore)

Con l'aiuto dei grafici sono state enunciate le proprietà dei logaritmi.
A questo punto sono state dimostrate le principali proprietà dei logaritmi, come qui di seguito riportato.

$$x = \log_a b \to \quad a^x = b$$
$$y = \log_a c \to \ a^y = c$$

- $\log_a b + \log_a c = x + y$

$\log_a b = x \qquad a^x = b$

$\log_a c = y \qquad a^y = c$

$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

- $\log_a b^c = c \log_a b$

$\log_a b = x \qquad a^x = b$

$(a^x)^c = b^c$

$\log_a b^c = x \cdot c$

$\log_a b^c = c \log_a b$

- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a (b \cdot c^{-1}) = \log_a b + \log_a c^{-1} = \log_a b - \log_a c$

È stato opportuno sottolineare il fatto che, in generale, il logaritmo trasforma processi geometrici in processi aritmetici; perciò, presa la progressione geometrica y_k e la funzione g(y) sotto definita, si è mostrato che si ottiene una progressione aritmetica.

<u>Passaggio dalla progressione geometrica a quella aritmetica</u>

$y_0 = 1$

$y_1 = m$

$y_2 = m^2$

.

$y_n = m^n$

$$g(y) = B \log_a y + c$$

$$g(y_{k+1}) - g(y_k) = B \log_a y_{k+1} + c - B \log_a y_k - c = B \log_a \frac{y_{k+1}}{y_k} = B \log_a m = \cos t$$

Sono state formalizzate anche la definizione e le principali proprietà della funzione logaritmica.

La funzione logaritmica e proprietà
Definizione. La funzione logaritmica di base a (a>0 e a≠1), che associa a ogni numero positivo il corrispondente logaritmo in base a.
Indicando tale numero positivo con x, variabile dipendente, e indicando con y il $\log_a x$, resta definita la funzione:
$f : x \to \log_a x$
cioè la funzione di equazione $y = \log_a x$.

- La funzione logaritmica è biiettiva, cioè è una corrispondenza biunivoca tra R^+ e R.
- La funzione logaritmica di base a è invertibile in R: l'inversa è la funzione esponenziale di base a. Il suo diagramma si può ottenere anche sottoponendo i punti della curva esponenziale alla simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante.
- La funzione logaritmica è monotona: crescente se a>1, decrescente se 0<a<1.
- La funzione logaritmica è un isomorfismo tra (R^+ , ·) e (R, +).

Sono stati disegnati i grafici della curva per a>1 e 0<a<1.

Infine, è stata posta l'attenzione sulla scala logaritmica e la sua importanza.

Scala logaritmica
Quello che si è voluto fare in questa parte è questo: motivare l'importanza dell'introduzione della funzione logaritmica, evidenziando una delle possibili applicazioni di tale funzione. Infatti, uno dei problemi ricorrenti tra gli studenti che vengono a contatto con un nuovo argomento è comprendere l'utilità dei nuovi concetti e perché si devono studiare.
Si è partiti da un semplice esempio.
È stata fornita ai ragazzi la seguente sequenza che costituisce un processo geometrico, cioè a rapporto costante di ragione 1/10:

$10, 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-15}$.

È stata posta ai ragazzi la seguente domanda: se volessimo rappresentare in un sistema di riferimento questi valori, quale unità di misura sarebbe opportuno scegliere?

I ragazzi si sono resi conto che non esiste una unità di misura che permetta di rappresentare significativamente in scala i valori della progressione.

È stato fatto calcolare ai ragazzi il logaritmo in base dieci di ciascun valore in modo di ottenere così una nuova sequenza di valori:

1, 0, -1,-2, -3,…,-15

I ragazzi hanno potuto osservare di aver ottenuto una progressione aritmetica in quanto ormai sapevano che il logaritmo trasforma processi geometrici in processi aritmetici. I nuovi valori sono stati facilmente rappresentati in un sistema di riferimento. Questo passaggio ha portato ad una scala logaritmica.

Per comprendere e fissare il concetto è stato riportato l'esempio numerico in un contesto di vita reale.

Situazione 1 La progressione geometrica riportata sopra, altro non è che il range dei possibili valori della concentrazione di ioni H_3O^+ e OH^- in una soluzione, valori che permettono di stabilire se una soluzione è acida o basica. Ripetendo il ragionamento precedente si ottiene il $\log_{10}[H_3O^+]$ e poiché la maggior parte dei valori è negativa conviene cambiare il segno, il che equivale a cambiare l'orientamento dell'asse x. La funzione ottenuta $pH = -\log_{10}[H_3O^+]$ è detta funzione pH o pH della soluzione.

Situazione 2 Come si misura il rumore? Il rumore è causato da un'onda che si propaga in un mezzo provocando una serie di compressioni e rarefazioni che vengono percepite dal nostro apparato uditivo. Esistono strumenti che misurano tali variazioni di pressione. L'unità di misura scelta è il Pascal. Una persona di udito medio può percepire un arco molto esteso di pressione, da 20 micro-Pascal a 100 Pascal (che corrisponde alla soglia del dolore). Allora, per comodità e perchè la sensazione sonora è proporzionale al logaritmo della pressione, si è introdotta la scala dei decibel (dB) esprimendola come il logaritmo del rapporto tra la pressione sonora misurata elevata al quadrato (grandezza proporzionale all'energia acustica) e una pressione di riferimento al quadrato. Il dB quindi è un numero "comodo" per rappresentare la pressione sonora.

$$dB = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$$

Quella ottenuta non è altro che una scala logaritmica.

Tappa 3 (2 ore)
Proposte di *rinforzo e di approfondimento* teorico/pratico, di applicazione reale o simulata delle conoscenze acquisite.

Esempio.
Rappresentare graficamente la curva logaritmica di equazione $y = \log_2 x$.
Suggerimento. Compilare prima la tabella aggiungendo altri valori.

x	y
1	0
2	1
…	…

Tappa 4 (12 ore)
I ragazzi sono stati invitati a svolgere delle ricerche per determinare in quali altri importanti settori delle scienze (e non solo) vengono utilizzati i logaritmi.