Implementazione del problema della approssimazione ai minimi quadrati

Definizione del problema

CASO DISCRETO: siano dati m punti $(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)$. Si vuole determinare un polinomio $p^*(x)$ nello spazio dei polinomi di grado $\leq n$ che indichiamo con P_n, con $n<m$ ed n,m interi, tale che lo scarto quadratico medio ε^2 così definito:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[p^*(x_i) - y_i \right]^2$$

risulti minimo rispetto ai coefficienti del polinomio.

Chiaramente $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(a_0,\dots a_n)$ dove gli a_i sono i coefficienti del polinomio $p^*(x)$.

Caso di approssimazione lineare

Nel caso in cui n=1 vogliamo determinare il polinomio di primo grado p(x)=ax+b (geometricamente una retta) che costituisce la migliore approssimazione ai minimi quadrati. Vogliamo cioè, noti m punti (x_i,y_i) i=1…m trovare i valori di a e b che minimizzano:

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2$$

Come minimizzare tale funzione ? Calcolando le derivate prime di F rispetto ad a e rispetto a b e ponendole uguali a zero.

$$\partial F / \partial b = 2\sum_{i=1}^{m}\left[y_i - (ax_i + b)\right] = 0$$

$$\partial F / \partial a = 2\sum_{i=1}^{m}\left[y_i - (ax_i + b)\right] x_i = 0$$

Si ottiene così un sistema di due equazioni in due incognite che risolto consente di esprimere a e b (le incognite !) in funzione delle coordinate degli m punti.

Il sistema che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} b\sum_{i=1}^{m} 1 + a\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ b\sum_{i=1}^{m} x_i + a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \end{cases}$$

ovvero, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} 1 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \end{bmatrix}$$

Le soluzioni del sistema ottenute applicando la regola di Cramer sono:

$$a = \frac{m\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{m} x_i)(\sum_{i=1}^{m} y_i)}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2})(\sum_{i=1}^{m} y_i) - (\sum_{i=1}^{m} x_i)(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i)}{m(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2}) - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$$

Definizione del problema (caso continuo)

CASO CONTINUO: Si vuole determinare p*(x) appartenente a P_n in modo tale da minimizzare la grandezza ε^2 o scarto quadratico medio così definita:

$$\varepsilon^2 = \int_a^b \left[p^*(x) - f(x) \right]^2 dx$$

Chiaramente $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(a_0,\ldots a_n)$ dove gli a_i sono i coefficienti del polinomio p*(x).

Soluzione del problema

Consideriamo lo spazio V=C[a,b], ovvero lo spazio delle funzioni continue in [a,b], vogliamo trovare i coefficienti a_0, …,a_n del polinomio p*(x) in P_n, che approssima f appartenente a V.

Dobbiamo minimizzare:

$$F(a_o,\ldots a_n) = \int_a^b (f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j x^j)^2 dx$$

Come si fa a minimizzare tale funzione ? Calcolando le derivate prime di F rispetto ai valori a_0,…,a_n e ponendole uguali a zero. Otteniamo il seguente sistema di n+1 equazioni nelle n+1 incognite a_0,…,a_n, :

$$\partial F / \partial a_i = 2\int_a^b (f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j x^j) x^i dx = 0$$ i=0…n

ovvero:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b x^{i+j} dx = \int_a^b f(x) x^i dx$$ i=0…n

nel caso in cui [a,b] = [0,1] il sistema diventa:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{i+j+1} a_j = \int_0^1 f(x) x^i dx$$ i=0…n

- Il sistema in forma matriciale si scrive:

$$\begin{pmatrix} h_{00} & \cdots & h_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dove :

$$b_i = \int_0^1 f(x) x^i dx$$

Problema

La matrice dei coefficienti è quella con elementi:

$$h_{i,j} = \left[\frac{1}{i + j + 1} \right] \qquad i,j=0,..n$$

Si tratta della **matrice di Hilbert** che è una matrice malcondizionata

Cosa significa mal condizionata?

Che se si risolve un sistema lineare con questa matrice dei coefficienti, "piccole" perturbazioni sui dati possono provocare "grandi" perturbazioni sulle soluzioni .