Introduzione alla teoria della relatività speciale

Note per gli Stages DIMA 2007

Danilo Bruno

Introduzione: i modelli matematici della realtà

Le presenti note rappresentano una breve introduzione alla teoria della relatività speciale, focalizzata sulla spiegazione dei principali concetti che hanno portato alla sua formulazione, sullo sviluppo delle principali idee contenute al suo interno e sulle sue più note conseguenze.

La teoria qui descritta rappresenta un esempio di come si possa comprendere il mondo che ci circonda utilizzando un *modello matematico*: in questo approccio, i fenomeni naturali che noi osserviamo vengono astratti e rappresentati da entità matematiche. In tal modo è possibile utilizzare gli strumenti messi a disposizione da differenti rami della matematica, che spesso erano stati inventati per altri scopi, per studiare fenomeni naturali anche molto complessi. Alternativamente, a volte risulta necessario sviluppare nuovi strumenti matematici che si adattino meglio alla descrizione di fenomeni osservati.

La costruzione di un modello matematico della realtà è generalmente effettuata seguendo un procedimento simile al seguente:

1. si determinano sperimentalmente una serie di fatti che vengono assunti come *assiomi* del modello: essi sono considerati veri fino a prova contraria;

2. si scelgono o si inventano le entità matematiche atte a descrivere in forma astratta le quantità misurate;

3. si utilizzano le quantità matematiche e le relazioni che esistono fra loro (dimostrate per mezzo di teoremi) per sviluppare una teoria che descriva il fenomeno in esame;

4. si utilizza la teoria così costruita per prevedere alcuni comportamenti del fenomeno fisico, differenti da quelli utilizzati per costruire gli assiomi, e si confrontano queste previsioni con le verifiche sperimentali;

5. qualora le verifiche sperimentali rivelassero una discrepanza fra modello e realtà è necessario tornare al passo 1 e ricostruire tutto a partire da diversi assiomi e diverse entità matematiche.

Come si evince dalla discussione precedente, la costruzione di un modello matematico è un'operazione creativa ed il risultato non rappresenta una verità assoluta, ma una possibile descrizione della realtà attraverso gli strumenti offerti dalla matematica. Uno dei vantaggi offerti da questo approccio è costituito dal fatto che tutta l' argomentazione è basata su pochi e semplici assiomi; lo sviluppo successivo viene fondato su solidi teoremi, dimostrati una volta per tutte e non falsificabili.

Nel seguito ci occuperemo di descrivere un particolare modello matematico, inventato da Albert Einstein nel 1905 e noto sotto il nome di Relatività Speciale, il cui scopo è quello di descrivere come si rapportano fra loro diversi osservatori quando studiano un fenomeno fisico. La modellizzazione di questo aspetto della realtà, che sembra a prima vista banale e privo di interesse, apporterà notevoli cambiamenti nella concezione del mondo rispetto al senso comune.

Il modello verrà costruito utilizzando solo le strutture matematiche di base che si studiano nelle scuole superiori (sostanzialmente quelle note nella metà del XIX secolo). Vedremo che alcuni aspetti del fenomeno richiederebbero l'utilizzo di strumenti più sofisticati, aprendo una porta verso l'esigenza di studiare e sviluppare tali strumenti, creando o imparando nuova matematica.

1 Preliminari

La creazione di modelli matematici della realtà è basata sull'utilizzo di grandezze *m*isurabili, ovvero di quantità che descrivono i fenomeni fisici assegnando ad essi un numero in base al risultato di un esperimento. Questa definizione di modello matematico distacca la descrizione filosofica del mondo, basata su considerazioni verbali, da quella matematica, che si rapporta alla realtà attraverso i numeri. Pertanto la definizione di tali grandezze dovrà essere fatta dichiarando una procedura di misura della grandezza in questione (definizione operativa).

1.1 Tempo, spazio, velocità e osservatori

Il modello fisico che proponiamo ha come scopo quello si descrivere il movimento dei corpi; la scienza che si occupa di questo aspetto della realtà prende il nome di meccanica.
Il concetto primario della meccanica è il concetto di *evento*, inteso come l'astrazione di un qualsiasi fenomeno a cui siamo in grado di associare una collocazione temporale e spaziale. Le modalità con cui tale associazione viene effettuata sarà il principale argomento del paragrafo. In particolare verrà analizzata brevemente la modellizzazione offerta dalla meccanica classica, legata all'intuizione offerta dall' esperienza quotidiana.
Il concetto di *tempo* è una categoria di pensiero innata in ciascuno di noi ed è basata sulla nostra consapevolezza del fatto che alcuni eventi accadono prima di altri. La quantificazione del tempo, necessaria al fine di costruire un modello matematico, è invece legata all' esistenza di fenomeni in natura che si ripetono periodicamente: il sorgere del sole, lo svuotamento di una clessidra, le oscillazioni di un pendolo o le vibrazioni di un cristallo di quarzo. Il confronto del tempo intercorso fra due eventi con il numero di volte che il fenomeno periodico si è ripetuto permette di associare al tempo un numero, rendendolo in tal modo utilizzabile operativamente. Chiameremo *orologio ideale* un qualsiasi apparecchio ideale che permette di convertire il tempo fra due eventi in numero, mediante la sopra citata operazione di confronto. Il termine ideale si riferisce al fatto che non siamo interessati alle modalità con cui tale misura viene fatta, né agli errori associati alla misura medesima a causa delle imperfezioni dell'apparato utilizzato, ma semplicemente all'operazione concettuale di misurare il tempo.
Il concetto di *spazio* è analogamente basato sulla possibilità di associare un numero alla distanza fra due oggetti, confrontandola con una unità di misura nota. A tal fine é sufficiente porre l'origine di un regolo in corrispondenza del primo oggetto e confrontando allo stesso

istante a quale misura corrisponde il secondo oggetto. Analogamente a prima definiremo *regolo ideale* uno strumento di misura in grado di convertire distanze in numeri.
Le due operazioni di misura sopra descritte sono le uniche necessarie per creare un modello matematico del movimento, ma il concetto di misura in sé richiede l'esistenza di qualcuno che la effettui: definiremo quindi *osservatore* un'entità astratta che guarda il mondo ed è in grado di effettuare misure. Esso sarà quindi dotato di un orologio ideale e di un regolo ideale: il primo gli permetterà di misurare il tempo che trascorre fra due eventi mentre il secondo gli permetterà di misurare le distanze fra gli oggetti e fra se e gli oggetti. In particolare, un osservatore può individuare una serie di punti, detti solidali, che risultano in quiete rispetto a lui; mediante questi ultimi, egli riesce a convertire la misura di distanza in una misura di *posizione*, con operazioni di triangolazione rispetto ai punti solidali stessi. Questa operazione viene descritta matematicamente, ponendo nello spazio una terna di assi cartesiani, centrata nella posizione dell'osservatore: ciascun asse congiunge l' osservatore con uno dei 3 punti solidali non complanari, scelti come riferimento per le operazioni di triangolazione (essi possono essere scelti in modo tale che gli assi siano mutualmente ortogonali). Egli può quindi assegnare ad ogni oggetto una terna di numeri (x, y, z), chiamati le *coordinate cartesiane*, che rappresentano la sua distanza dagli assi medesimi. Nel seguito, sarà sufficiente considerare moti che avvengono in un piano fissato: per semplicità utilizzeremo pertanto solo una coppia di coordinate cartesiane (x, y). Denoteremo *riferimento* associato ad un osservatore l' insieme dei punti a lui solidali.
Possiamo ora dichiarare che un oggetto è in *movimento* rispetto ad un osservatore quando la sua posizione varia nel tempo. Ogni osservatore è in grado di valutare quando questo accade con operazioni di misura e di descriverlo numericamente, fornendo le coordinate cartesiane del punto al variare del tempo, ovvero esplicitando una coppia di valori numerici $(x(t), y(t))$ in funzione del tempo. Essa descrive una curva sul piano cartesiano, nota come *equazione finita di movimento.*
La conoscenza dell'equazione finita di movimento permette di ottenere facilmente il concetto di velocità. Questo concetto sarà ritenuto noto; richiameremo solo le principali definizioni per fissare le notazioni. Denotiamo con $\hat{x}$ e $\hat{y}$ due vettori di modulo unitario (detti *versori*) lungo le direzioni individuati dagli assi cartesiani. La *velocità media* di un punto in un intervallo temporale $t_2 - t_1$ è un vettore $\vec{u} = u_x\,\hat{x} + u_y\hat{y}$, tale che

$$u_x = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad ; \quad u_y = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Si dice invece *velocità istantanea* la quantità ottenuta facendo il limite per t_2 che tende a t_1 della velocità media. Questo permette di legare il concetto di velocità con quello di derivata prima come segue:

$$u_x = \lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right) = \left. \frac{d\,x(t)}{d\,t} \right|_{t=t_1} \quad ; \quad u_y = \left. \frac{d\,y(t)}{d\,t} \right|_{t=t_1}$$

Nel seguito, tuttavia, ci occuperemo solo di moti *rettilinei ed uniformi*, ovvero di moti che avvengono con velocità costante in modulo direzione e verso, per i quali i concetti di velocità media ed istantanea coincidono. Per tali moti, l'equazione finita di movimento assume la forma

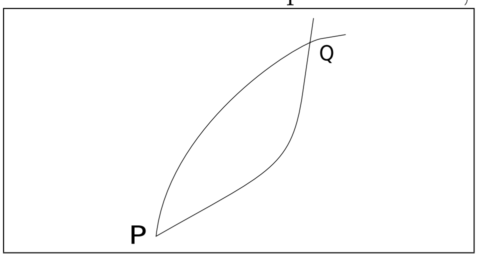
$$x(t) = u_x\,t + x(0) \quad ; \quad y(t) = u_y\,t + y(0) \tag{1.1}$$

con u_x ed u_y costanti.

Il motivo per cui i moti rettilinei ed uniformi giochino un ruolo così importante in meccanica è di origine dinamica. Senza addentrarci nei particolari, ricordiamo che esiste una particolare classe di osservatori, detta degli osservatori *inerziali*, per i quali il moto di un punto materiale libero (non soggetto a forze) è rettilineo ed uniforme. Tutti questi osservatori hanno la proprietà di essere in moto relativo l'uno rispetto all' altro con velocità uniforme. Ai fini della presente trattazione, non saremo interessati all' inerzialità dei riferimenti (in quanto non ci occuperemo di dinamica); tuttavia concentreremo la nostra attenzione sui moti uniformi, per i motivi sopra citati.

1.2 Cinematica relativa

Come già ribadito in precedenza, i concetti cinematici introdotti sopra assumono significato solo se rapportati ad un osservatore, che è in grado di compiere misure con gli strumenti in suo possesso. Tali misure hanno pertanto carattere *relativo* all'osservatore stesso, ed è sensato chiedersi come la descrizione del movimento cambi al variare dell'osservatore.
L'esperienza comune ci dice infatti in modo evidente che gli oggetti che appaiono fermi ad un osservatore non appaiono tali ad un altro osservatore che si muova rispetto al primo. La quantificazione di tale differenza richiede però un approfondimento, dal momento che bisogna valutare non solo le differenze nella descrizione del movimento degli oggetti, ma come i concetti stessi di tempo e spazio cambino da un osservatore ad un altro. Cominceremo con l'analizzare un semplice modello matematico costruito a partire dalla nostra esperienza quotidiana: come vedremo, esso condurrà allo studio della meccanica classica.
Per prima cosa ci chiediamo come cambi la misura del tempo fra due osservatori in moto relativo. Questo non può essere deciso a priori in base a canoni estetici o riflessioni estemporanee, ma deve essere oggetto di verifica sperimentale: é cioè necessario chiedersi se si osservano differenze nel trascorrere del tempo fra un osservatore fermo ed uno in movimento. La questione può essere formalizzata in modo più preciso considerando due orologi ideali in moto relativo l'uno rispetto all'altro, come indicato nella figura.



I due orologi vengono sincronizzati a vista al loro primo incontro nel punto P. È quindi possibile controllare se essi sono ancora sincronizzati quando si incontrano nuovamente nel punto Q. L'esperienza quotidiana conferma il fatto che i due orologi restano sincronizzati.

Questa esperienza viene elevata al rango di principio in meccanica classica e prende il nome di *assioma del tempo assoluto: lo stato di moto non influenza la misura del tempo da parte di un orologio ideale*. Come conseguenza, data una coppia di eventi, la loro separazione temporale sarà la stessa nel giudizio di tutti gli osservatori, avendo in tal modo carattere assoluto. É quindi possibile associare ad ogni evento una *coordinata temporale* t, nota come tempo assoluto, uguale per tutti gli osservatori.
Questo fatto assicura inoltre all'osservatore la possibilità di sincronizzare orologi posti in punti diversi dello spazio, per misurare separazioni temporali di eventi che avvengono lontani dalla sua posizione. Basta che egli sincronizzi a vista un orologio ideale con il proprio e lo ponga nel punto in cui l' evento avviene. Dal momento che il trascorrere del tempo non dipende dallo stato di moto dell' orologio, egli è sicuro che l' orologio rimanga sincronizzato, fornendogli

la misura del tempo in qualunque punto dello spazio in modo sincrono con l' orologio ideale posto nell' origine.
Anche la misura della distanza spaziale risulta essere uguale per tutti gli osservatori: infatti l'esperienza quotidiana mostra che la lunghezza degli oggetti non cambia al variare dello stato di moto di un oggetto. Questo aspetto è noto sotto il nome di *assioma dello spazio assoluto: gli attributi metrici spaziali non sono influenzati dallo stato di moto dell'osservatore.*
Infine, nel valutare la relazione fra i due osservatori terremo anche conto dell' importanza che rivestono gli osservatori in moto relativo rettilineo ed uniforme. É infatti noto dall'esperienza quotidiana il seguente fatto: ogni qual volta un moto è rettilineo ed uniforme rispetto ad un osservatore, esso è tale anche nel giudizio di tutti gli altri osservatori che si muovono di moto rettilineo ed uniforme rispetto al primo. Anche questa osservazione sarà assunta al rango di assioma nella discussione successiva.

Vediamo come le considerazioni sopra descritte possano essere quantificate. Consideriamo due osservatori O ed O', e supponiamo che O' si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad O. Sia $\vec{v}$ la velocità di O' rispetto ad O; per semplificare la trattazione, scegliamo l'asse x di entrambi i riferimenti nella direzione di $\vec{v}$ (questa scelta può sempre essere effettuata in virtú dell'arbitrarietà nella scelta degli assi). La velocità assumerà pertanto la forma $\vec{v} = v\hat{x}$. La situazione è rappresentata in Figura 1.

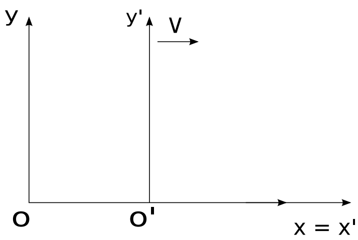


Figura 1: Due riferimenti in moto relativo

Se denotiamo con (x, y) le coordinate spaziali di O e $(x'y')$ quelle di O', la trasformazione fra di esse è descritta da un sistema lineare[1]

$$\begin{cases} x' &= ax + bt \\ y' &= y \end{cases} \tag{1.2}$$

La scelta di utilizzare una trasformazione lineare fa in modo che un moto rettilineo uniforme nel giudizio di O resti rettilineo ed uniforme nel giudizio di O'. Infatti se consideriamo un punto che si muove di moto rettilineo uniforme nel giudizio di O, la sua equazione finita di movimento sarà descritta dall'equazione (1.1). Utilizzando le equazioni (1.2) possiamo trasformarla in

$$x'(t) = a\,(u_x\,t + x(0)) + b\,t = (a\,u_x + b)\,t + a\,x(0) = u'_x\,t + x'(0)$$

$$y'(t) = (u_y\,t + y(0)) = u'_y\,t + y'(0)$$

che rappresenta un moto rettilineo uniforme nel giudizio di O'.

[1]Notiamo che la coordinata temporale è la stessa per entrambi, in virtù dell'assioma del tempo assoluto.

Possiamo ora valutare i parametri a e b da un punto di vista cinematico, ovvero legarli alla velocità relativa dei due riferimenti. Basta osservare che il moto del punto O' sarà descritto nei due riferimenti come segue (supponendo che per $t = 0$ i due osservatori siano coincidenti);

$$\text{Moto di O'} : \begin{cases} \text{Secondo O} & : \ x(t) = vt \\ \text{Secondo O'} & : \ x'(t) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Sostituendo nella (1.2) otteniamo

$$0 = a\,v\,t + b\,t \quad \Rightarrow \quad b = -a\,v \quad \Rightarrow \quad x' = a(x - v\,t)$$

Analogamente osserviamo che il moto di O è descritto da

$$\text{Moto di O} : \begin{cases} \text{Secondo O} & : \ x(t) = 0 \\ \text{Secondo O'} & : \ x'(t) = -v\,t \end{cases}$$

Da cui, sostituendo nella (1.2):

$$-v\,t = a(-v\,t) \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Questo conduce alle *formule di trasformazione di Galileo*, che legano le coordinate di O a quelle di O', in moto rispetto al primo con velocità uniforme $\vec{v} = v\hat{x}$:

$$\begin{cases} x' & = x - vt \\ y' & = y \\ t' & = t \end{cases} \tag{1.4}$$

Analizziamo ora la ricaduta delle trasformazioni (1.4) sulla legge di composizione delle velocità. Consideriamo un punto che si muova con velocità $\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y}$ uniforme nel giudizio dell' osservatore O. La descrizione del moto nel giudizio di O sarà:

$$x(t) = u_x\,t + x(0) \quad ; \quad y(t) = u_y\,t + y(0)$$

Utilizzando le equazioni (1.4) possiamo ottenere la descrizione nel giudizio di O:

$$x'(t) = u_x\,t + x(0) - v\,t = (u_x - v)\,t + x(0) \quad ; \quad y'(t) = u_y\,t + y(0)$$

Questo significa che la velocità rispetto ad O' è legata a quella rispetto ad O dalla legge

$$u'_x = u_x - v \quad ; \quad u'_y = u_y \tag{1.5}$$

Questa verrà chiamata *legge di addizione delle velocità* e può essere riassunta dicendo che al variare del riferimento la velocità del punto e la velocità del riferimento si sommano vettorialmente.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, questo aspetto della meccanica classica cadrà in contrapposizione con i fenomeni elettromagnetici, portandoci verso la teoria della Relatività.

2 Onde elettromagnetiche

Questa sezione è dedicata alla descrizione dei fenomeni elettromagnetici che hanno portato ad una crisi della meccanica classica.

2.1 La propagazione delle onde elettromagnetiche

Durante il XIX secolo una nuova serie di fenomeni fisici, noti sotto il nome di fenomeni elettrici e magnetici, vennero scoperti, studiati sperimentalmente e modellizzati sempre più accuratamente.
Uno dei fenomeni di questo tipo con cui abbiamo quotidianamente a che fare è quello delle onde elettromagnetiche (ne sono esempi notevoli la luce visibile, le onde radio, i raggi X ...). Tuttavia nessuno di noi penserebbe neppure lontanamente ad imparentare questi fenomeni con la forza magnetica esercitata da una calamita.
Nel 1885 il fisico matematico inglese J.C. Maxwell creò un modello matematico in grado di descrivere tutti i fenomeni elettromagnetici noti all'epoca: questo modello è riassunto in una serie di 4 equazioni, note come equazioni di Maxwell, la cui trattazione non sarà qui svolta sia perché non è rilevante ai fini della discussione successiva, sia perché sarebbero necessari strumenti matematici più sofisticati di quelli introdotti fino ad ora.
L' unico aspetto fondamentale utile nel seguito è costituito dal fatto che una soluzione delle equazioni di Maxwell descrive il fenomeno delle onde elettromagnetiche sotto forma di un campo elettrico ed un campo magnetico che oscillano perpendicolarmente l'uno all'altro e si propagano nello spazio.
Ma l' aspetto più sorprendente è costituito dal fatto che le equazioni di Maxwell permettono di ricavare la *velocità di propagazione* delle onde elettromagnetiche nel vuoto: essa è un numero che dipende solo da una serie di costanti fondamentali e vale

$$c = 299^{\cdot}792.458 \; km/s$$

Tale velocità verrà nel seguito chiamata *velocità della luce*. Il fatto che le equazioni di Maxwell debbano valere inalterate in tutti i riferimenti, crea una evidente contraddizione con gli argomenti sviluppati sopra. Essendo la velocità un concetto relativo, l'affermazione secondo cui le onde elettromagnetiche si propagano con la medesima velocità nel giudizio di ogni osservatore è in contrasto con il teorema di addizione delle velocità.
Per farci un' idea più precisa del fenomeno, cerchiamo di studiare in modo semplice la propagazione delle onde elettromagnetiche e come varia tale descrizione al variare del riferimento.
Supponiamo di accendere una lampadina in un punto dello spazio, in cui poniamo un osservatore O. La luce emessa dalla lampadina si propagherà nello spazio alla velocità c sopra citata. Se chiamiamo *fronte d'onda* la superficie che divide la regione che è già stata raggiunta dall'onda da quella ancora buia, essa è rappresentata da una sfera. (Questa affermazione può essere alternativamente considerata come un dato sperimentale, oppure come una conseguenza delle equazioni di Maxwell).
Nel nostro modello bidimensionale, tale sfera è rappresentata da una circonferenza, centrata in O e avente all'istante t generico raggio pari a $R = c\,t$, come rappresentato in figura. Tale luogo di punti è descritto dall' equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 = c^2\,t^2 \tag{2.1}$$

In particolare è possibile calcolare l'equazione dei punti A, B, C e D di intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x_A(t) &= c\,t \\ y_A(t) &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B(t) &= 0 \\ y_B(t) &= c\,t \end{cases} \quad \begin{cases} x_C(t) &= -c\,t \\ y_C(t) &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_D(t) &= 0 \\ y_D(t) &= -c\,t \end{cases} \tag{2.2}$$

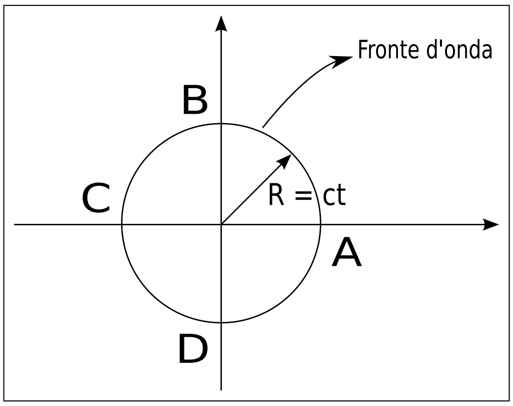


Figura 2: Il fronte d'onda emesso dalla sorgente in O all'istante t generico

Osserviamo in particolare che tutti questi punti si muovono con una velocità avente modulo pari a c, in accordo con le equazioni di Maxwell.
Se consideriamo un osservatore O', in moto rettilineo uniforme rispetto ad O nella direzione dell' asse x, possiamo valutare quale sia la descrizione che egli dá della superficie (2.1), utilizzando le equazioni (1.4). Otteniamo che:

$$(x' + v\,t)^2 + y'^2 = c^2\,t^2 \tag{2.3}$$

Essa rappresenta nuovamente ua circonferenza di raggio $R = c\,t$ centrata nel punto $(-v\,t, 0)$, come rappresentato in figura. Possiamo nuovamente giudicare quale sia la velocità dei punti

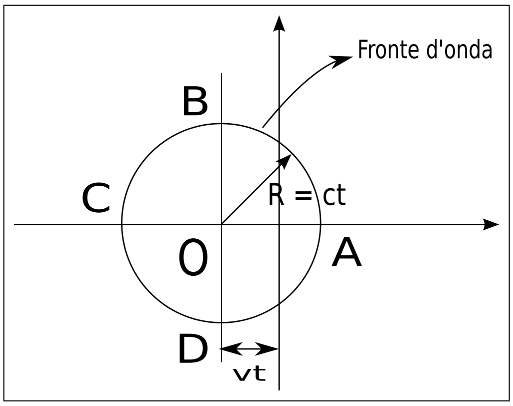


Figura 3: Il fronte d'onda emesso dalla sorgente O nel giudizio di O' all'istante t generico

A, B, C e D di prima. Otteniamo che:

$$\begin{cases} x'_A(t) &= (c+v)\,t \\ y'_A(t) &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_B(t) &= -v\,t \\ y'_B(t) &= c\,t \end{cases} \quad \begin{cases} x'_C(t) &= (-c+v)\,t \\ y'_C(t) &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_D(t) &= -v\,t \\ y'_D(t) &= -c\,t \end{cases} \tag{2.4}$$

In particolare, possiamo concentrare la nostra attenzione sulla velocità dei punti A e B e valutarne il modulo. Essendo questa la velocità con cui si propaga un' onda elettromagnetica, essa dovrebbe essere pari a c secondo le equazioni di Maxwell. Abbiamo tuttavia che:

$$\vec{v}'_A = (c+v)\hat{x} \quad ; \quad \vec{v}'_B = -v\hat{x} + c\hat{y}$$

da cui:

$$|\vec{v}'_A| = (c+v) \quad ; \quad |\vec{v}'_B| = \sqrt{v^2+c^2} \tag{2.5}$$

Dall'equazione (2.5) si vede che le due velocità sono entrambe diverse da c (e quindi sono in contraddizione con le equazioni di Maxwell), e sono anche *diverse fra loro.* Quest' ultimo aspetto sarà di rilevante importanza nel seguito.

2.2 L'esperimento di Michelson e Morley

Il risultato evidenziato sopra apre nuove prospettive. Infatti le equazioni di Maxwell, che asseriscono l' invarianza della velocità delle onde eletromagnetiche nel vuoto, sembrerebbero contraddire il teorema di addizione delle velocitá. L' unico modo per sapere quale dei due aspetti del modello sia corretto è quello di misurare la velocità della luce in due diversi sistemi di riferimento e vedere quale risultato si ottiene.
Purtroppo la misura della velocità della luce è molto complicata (e lo era a maggior ragione alla fine del 1800). Infatti, non è possibile misurare tale numero valutando il tempo impiegato dalla luce a percorrere un percorso fissato (come si farebbe con un' automobile), con cronometri che misurano al più frazioni di secondo. Infatti la luce percorre in 1 secondo $300\,000 km$, lunghezza confrontabile con la distanza che separa la Terra dalla Luna.
L' idea per porre in atto il progetto di valutare la differenza di velocità fra due riferimenti fu di Michelson e fu poi perfezionata da Morley; essa non è basata sulla misura diretta di tale velocità, ma sulla misura della differenza fra velocità di propagazione nelle diverse direzioni, come messo in evidenza dalle equazioni (2.5).
Per attuare questo progetto Michelson aveva bisogno di due osservatori in moto relativo l'uno rispetto all' altro con velocità sufficientemente elevata, in modo da riuscire a valutare la differenza fra $|\vec{v}_A|$ e $|\vec{v}_B|$. Egli scelse come osservatore O' la Terra, che si muove rispetto alle stelle fisse con una velocità di circa $30\,km/s$ e costruì un apparato in grado di misurare con tecniche interferometriche la differenza fra la velocità della luce nella direzione del moto della Terra e quella perpendicolare.
Non entreremo nei dettagli del funzionamento dell' apparato, ma descriveremo solo per linee generali il suo funzionamento. L' interferometro di Michelson è rappresentato in figura. Lo

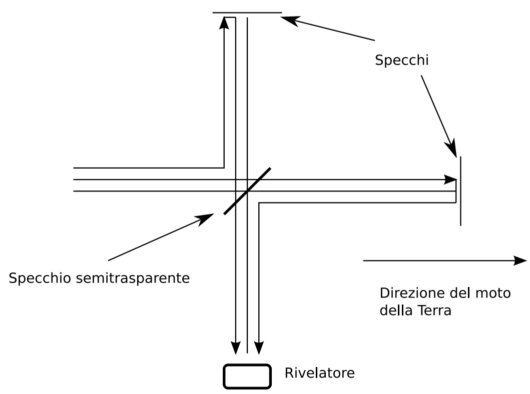


Figura 4: Schema generale dell' interferometro di Michelson

specchio semitrasparente al centro dell' apparato permette di dividere un raggio luminoso in due fasci, uno parallelo ed uno perpendicolare alla direzione nel moto della Terra. I due

raggi vengono riflessi da due specchi e rifocalizzati in un rivelatore. La differenza fra la velocità di propagazione nelle due direzioni si dovrebbe tradurre in una differenza fra i tempi di percorenza dei due rami dell' interferometro e dovrebbe produrre la formazione di una serie di frange di interferenza fra i due raggi nella posizione del rilevatore.
La misura è molto critica, a causa della precisione richiesta e trascureremo qui l' analisi di tutti i problemi tecnici risolti da Michelson e Morley. L' unica cosa che a noi interessa ai fini della discussione successiva è il risultato sconvolgente dell' esperimento. Infatti non venne rilevata alcuna frangia di interferenza, come se il teorema di addizione delle velocità non valesse per i raggi luminosi.
Diverse teorie furono proposte per spiegare questo risultato. Le prime ipotesi, cercarono di salvare sia le equazioni di Maxwell, sia il teorema di addizione delle velocità, interpretandole in modo da rendere il tutto coerente. Le ipotesi più in voga per un certo periodo furono quella di trascinamento dell' etere e quella delle contrazioni di Lorentz. Non analizzeremo queste teorie, sia perché sono al di fuori dei nostri scopi, sia perchè sono poi state superate completamente dalla teoria di Einstein, a cui è dedicato il resto della trattazione.

3 Le trasformazioni di Lorentz

3.1 La critica al concetto di tempo assoluto

A differenza delle ipotesi sopra riportate, la critica di Einstein fu molto più radicale. Infatti, egli decise di prendere alla lettera il risultato dell' esperimento di Michelson e Morley e di utilizzare come ipotesi di partenza il fatto che *la velocità della luce è uguale in tutti i riferimenti*. Come già più volte ribadito, questo risulato è in contrasto con il teorema di addizione delle velocità che dovrebbe essere in qualche modo cambiato.
La grande intuizione di Einstein fu quella di rendersi conto che l' invarianza della velocità della luce è in contrasto con l' assioma del tempo assoluto e quindi con tutti i concetti che hanno portato alla formulazione della meccanica classica.
Questo aspetto può essere compreso mediante il seguente esperimento concettuale. Consideriamo un vagone ferroviario lungo $2a$ che si stia muovendo con velocità v lungo l'asse x rispetto ad un osservatore O. Una lampadina viene accesa al suo centro all' istante $t = 0$ e la luce da essa emessa si propaga con velocità c verso le pareti, come rappresentato in figura. Il tempo impiegato dalla luce per giungere su entrambe le pareti A e B nel giudizio dell'

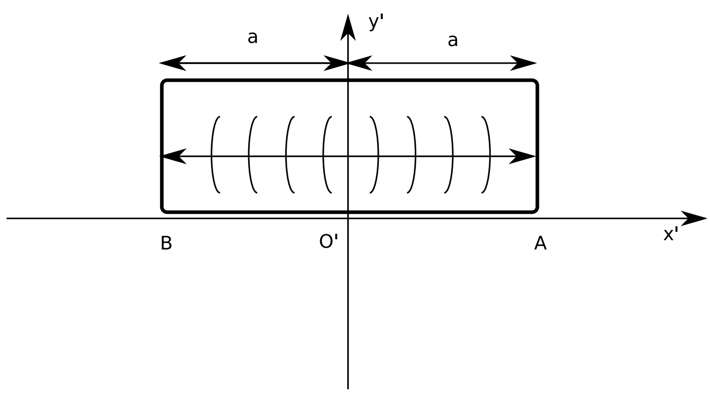


Figura 5: Accensione della lampadina nel giudizio dell' osservatore O' solidale al vagone

osservatore O' solidale al vagone è pari a

$$t'_A = t'_B = \frac{a}{c}$$

Quindi gli eventi "luce raggiunge A" e "luce raggiunge B" sono *simultanei* nel giudizio di O'. Consideriamo ora il medesimo fenomeno nel giudizio di un osservatore O fermo, rispetto al quale il vagone si stia muovendo con velocità v. La situazione è rappresentata in figura.

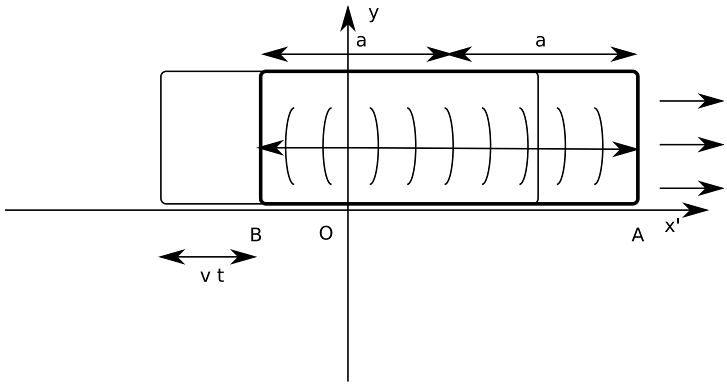


Figura 6: Accensione della lampadina nel giudizio dell' osservatore O solidale ai binari

Utilizziamo inizialmente gli assiomi della meccanica classica ed il teorema di addizione delle velocità. Il raggio che viaggia verso A ha velocità pari a $v_A = c + v$ e percorre una distanza $AO = a + v\,t_A$, mentre il raggio che viaggia verso B ha velocità $v_B = c - v$ e percorre una distanza $BO = a - v\,t_B$ (t_A e t_B rapresentano i tempi impiegati dai raggi per raggiungere rispettivamente A e B.). Si ha pertanto che i tempi di percorrenza valgono

$$t_A = \frac{a + v\,t_A}{c + v} \quad ; \quad t_B = \frac{a - v\,t_B}{c - v}$$

da cui risolvendo per t_A e t_B si ha:

$$t_A = t_B = \frac{a}{c} \tag{3.1}$$

Questo significa che secondo la meccanica classica, anche un osservatore rispetto a cui il vagone è in movimento giudica i due eventi simultanei. É inoltre evidente la validità dell' assioma del tempo assoluto, dal momento che $t_A = t'_A$ e $t_B = t'_B$.
Analizziamo ora il fenomeno supponendo che la velocitá della luce valga c in entrambi i riferimenti. È evidente che la luce raggiungerà i punti A e B in due istanti diversi. Infatti:

$$t_A = \frac{a + v\,t_A}{c} \quad ; \quad t_B = \frac{a - v\,t_B}{c}$$

da cui

$$t_A = \frac{a}{c - v} \quad ; \quad t_B = \frac{a}{c + v} \tag{3.2}$$

che sono evidentemente diversi. Questo significa che i due eventi "luce raggiunge A" e "luce raggiunge B" sono simultanei nel giudizio di O' e non simultanei nel giudizio di O. Questo risultato può essere riassunto dichiarando che *il concetto di simultaneità dipende dalla scelta dell' osservatore.*

Einstein tenne conto della questione scardinando l' assioma del tempo assoluto e ricavando le leggi di trasformazione fra osservatori supponendo a priori che il tempo non sia più uguale nei due sistemi di riferimento.

3.2 Le leggi di trasformazione fra riferimenti inerziali

Siamo ora in grado di ricavare le leggi di trasformazione fra le quantità che descrivono il movimento fra diversi sistemi di riferimento. Terremo conto del fatto che il tempo è una quantità relativa alla scelta dell' osservatore, sostituendo l'assioma del tempo assoluto con un nuovo assioma, che sia coerente con i dati sperimentali osservati. Pertanto, questi sono i nuovi assiomi che vengono presi come punto di partenza:

1. ogni qual volta un moto è rettilineo ed uniforme rispetto ad un osservatore, esso è tale anche nel giudizio di tutti gli altri osservatori che si muovono di moto rettilineo ed uniforme rispetto al primo;

2. la velocità della luce è pari a c nel giudizio di tutti gli osservatori.

Notiamo che il primo assioma è uguale al suo corrispettivo in meccanica classica, e tiene conto dell' importanza dei sistemi di riferimento inerziali. Il secondo, invece, è una diretta conseguenza dell' esperimento di Michelson e Morley.
Consideriamo ora due osservatori O ed O' e supponiamo che il secondo si muova con velocità costante v diretta lungo l'asse x rispetto al primo. Tenendo conto che il tempo è funzione della scelta dell' osservatore, la più generale trasformazione che mappa moti uniformi in moti uniformi sarà la seguente trasformazione lineare[2]:

$$\begin{cases} x' = & a\,x + b\,t \\ t' = & A\,x + B\,t \end{cases} \tag{3.3}$$

Nuovamente, è possibile ricavare il significato cinematico di alcune delle costanti presenti, conoscendo il moto relativo di O ed O'. Infatti sapendo che

$$\text{Moto di O'} : \begin{cases} \text{Secondo O} & : \; x(t) = vt \\ \text{Secondo O'} & : \; x'(t) = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$0 = a\,v\,t + b\,t \quad \Rightarrow \quad b = -a\,v \quad \Rightarrow \quad x' = a(x - v\,t)$$

Analogamente osserviamo che il moto di O è descritto da

$$\text{Moto di O} : \begin{cases} \text{Secondo O} & : \; x(t) = 0 \\ \text{Secondo O'} & : \; x'(t) = -v\,t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -v\,t' = & b\,t \\ t' = B\,t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = -B\,v$$

[2]É possibile generalizzare facilmente il discorso della sezione 2 al caso attuale e pertanto la verifica verrà lasciata per esercizio al lettore.

Sostituendo nella (3.3) si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = & a(x - v\,t) \\ t' = & A\,x + a\,t \end{cases} \tag{3.4}$$

Come vediamo, la conoscenza del moto relativo dei due osservatori non è più sufficiente a determinare le leggi di trasformazione. É necessario utilizzare il secondo assioma, imponendo che la velocità della luce sia invariante. A tal fine è sufficiente imporre che *la descrizione della propagazione di un fronte d' onda sia identica nei due riferimenti*, ovvero

$$x^2 + y^2 = c^2\,t^2 \quad \Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 = c^2\,t'^2 \tag{3.5}$$

Sostituendo dalla (3.4) si ottiene che

$$a^2(x - v\,t)^2 + y^2 = c^2(A\,x + a\,t)^2$$

da cui

$$(a^2 - c^2\,A^2)\,x^2 + y^2 - 2(a^2\,v + a\,A\,c^2)\,x\,t = (c^2\,a^2 - a^2\,v^2)\,t^2$$

L'equazione (3.5) è soddisfatta se

$$\begin{cases} a^2 - c^2\,A^2 & = 1 \\ a^2\,v + a\,A\,c^2 & = 0 \\ c^2\,a^2 - a^2\,v^2 & = c^2 \end{cases}$$

Le prime due possono essere risolte rispetto ad a ed A, da cui

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad ; \quad A = -\gamma\frac{v}{c^2}$$

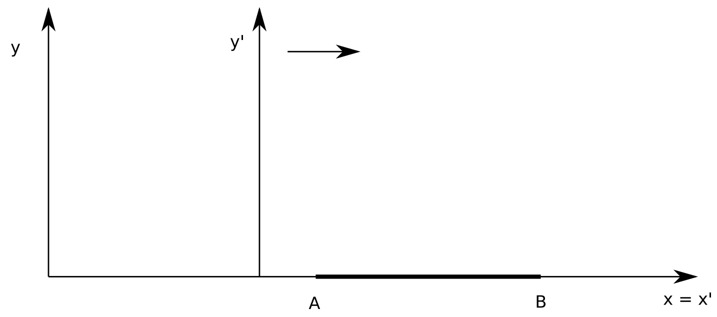
Con questi valori, la terza equazione è identicamente soddisfatta. Possiamo quindi scrivere le equazioni che regolano le trasformazioni fra riferimenti in moto relativo rettilineo uniforme lungo l' asse x. Esse sono note come *trasformazioni di Lorentz* e sono:

$$\begin{cases} x' = & \gamma(x - v\,t) \\ y' = & y \\ t' = & \gamma\left(t - \frac{v\,x}{c^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & \gamma(x' + v\,t') \\ y = & y' \\ t = & \gamma\left(t' + \frac{v\,x'}{c^2}\right) \end{cases} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.6}$$

3.3 Conseguenze cinematiche

Le leggi di trasformazione (3.6) hanno una ricaduta rivoluzionaria sui concetti stessi si tempo e di spazio e sulla descrizione del moto al variare del siatema di riferimento. Nel seguito analizzeremo alcune di queste conseguenze.

La contrazione delle lunghezze
Consideriamo una sbarretta posta lungo l' asse x e valutiamone la lunghezza nel giudizio dei due osservatori. Come già ribadito in precedenza, la misura della lunghezza viene effettuata valutando la posizione di entrambi gli estremi *allo stesso istante*. Ora, però, il concetto di simultaneità è cambiato ed è quindi necessario fare molta attenzione.



Supponiamo che la sbarretta sia in quiete nel giudizio dell' osservatore O' e che i suoi estremi siano posti nei punti $A = (x'_A, 0)$ e $B = (x'_B, 0)$, come rappresentato in figura. Nel giudizio di O' la sua lunghezza ad ogni istante $t'_A = t'_B$ sarà banalmente $\ell' = x'_B - x'_A$. Per valutare la medesima lunghezza nel riferimento O è necessario valutare la differenza $\ell = x_B - x_A$ all' istante $t_A = t_B$. Dalle (3.6), sottraendo membro a membro, abbiamo che:

$$\begin{array}{rl} x'_A = & \gamma(x_A - v\, t_A) \\ x'_B = & \gamma(x_B - v\, t_B) \\ \hline (x'_B - x'_A) = & \gamma(x_B - x_A) \end{array}$$

Se chiamiamo $\ell_0 = \ell'$ la *lunghezza di riposo* della sbarretta, ovvero la lunghezza valutata nel sistema di riferimento in cui la sbarretta è ferma, abbiamo la cosiddetta *formula di contrazione delle lunghezze*:

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma} = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \ell_0 \tag{3.7}$$

Questo può essere riassunto dicendo che la sbarretta appare scorciata di un fattore γ nella direzione del moto.

Dilatazione dei tempi
Analogamente è possibile quantificare la differenza nella valutazione dello scorrere del tempo nel giudizio di due diversi osservatori. In particolare consideriamo due eventi A e B, che avvengono nell' origine O' di un riferimento in moto con velocità v diretta lungo l'asse x rispetto ad O. Si può ad esempio pensare che essi corrispondano al passaggio di una lancetta dell' orologio ideale di O' in una posizione A e B del quadrante fissate. L' osservatore O' giudicherà la loro posizione essere pari a $x'_A = x'_B = 0$ e la loro separazione temporale pari a $\Delta\tau = t'_B - t'_A$.
Per giudicare la separazione temporale valutata da O, utilizziamo le equazioni (3.6), come segue:

$$\begin{array}{rl} t_A = & \gamma \left(t'_A + \frac{v\, x'_A}{c^2} \right) \\ t_B = & \gamma \left(t'_B + \frac{v\, x'_B}{c^2} \right) \\ \hline (t_B - t_A) = & \gamma\, (t'_B - t'_A) \end{array}$$

Da cui si ottiene la *formula di dilatazione dei tempi*:

$$\Delta t = \gamma\, \Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.8}$$

Questo può essere parafrasato dicendo che la distanza temporale fra due eventi che avvengono in un punto in moto rispetto ad un osservatore O risultano dilatati di un fattore γ.

Leggi di composizione delle velocità
Vediamo ora come la formula classica di addizione delle velocità può essere cambiata in modo da tenere conto dell' invarianza della velocità della luce. Consideriamo un punto in moto rettilineo uniforme nel riferimento O' (e pertanto anche nel riferimento O). Tale moto sarà descritto dai due osservatori nella forma:

$$\begin{cases} x(t) = & u_x t + x(0) \\ y(t) = & u_y t + y(0) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x'(t) = & u'_x t + x'(0) \\ y'(t) = & u'_y t + y'(0) \end{cases}$$

Per calcolare la velocità nei due riferimenti è necessario utilizzare il concetto di derivata. Avremo infatti che

$$u'_x = \frac{dx'(t')}{dt'} = \frac{dx'(t(t')))}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}$$

L' ultima identità è dovuta al teorema di derivazione delle funzioni inverse. Facendo le derivate rispetto al tempo delle equazioni (3.6) otteniamo che:

$$u'_x = \left[\frac{d}{dt}\gamma(x - v\,t)\right] \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\gamma\left(t - \frac{v\,x}{c^2}\right)\right)\right]^{-1} = [\gamma(u_x - v)] \cdot \left[\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)\right]^{-1}$$

Da cui:

$$u'_x = \frac{(u_x - v)}{\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \tag{3.9a}$$

Analogamente di ottiene che:

$$u'_y = \frac{dy'(t')}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} = [u_y] \cdot \left[\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)\right]^{-1}$$

da cui:

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \tag{3.9b}$$

Le formule (3.9) sono le equazioni che regolano la composizione delle velocità nel caso relativistico. Come vediamo, anche se il moto del riferimento avviene solo nella direzione x, la formula di composizione delle velocità risulta alterata in entrambe le direzioni, a causa della legge di trasformazione dei tempi.
L' invarianza della velocità della luce è ovviamente soddisfatta. Se $u_x = c$ dalla (3.9a) si ha che:

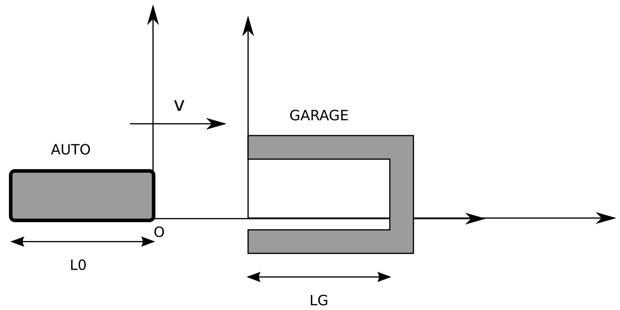
$$u'_x = \frac{c - v}{\left(1 - \frac{v\,c}{c^2}\right)} = c^2\frac{c - v}{c^2 - c\,v} = c$$

In particolare si può vedere che non 'e possibile fare in mdodo che un punto materiale si muova a velocità superiore alla velocità della luce cambiando sistema di riferimento. L' impossibilità di superare tale limite è tuttavia una conseguenza della dinamica e non sarà qui analizzata.

3.4 Alcuni (apparenti) paradossi

Le conseguenze cinematiche della relatività speciale si scontrano pesantemente con il nostro senso comune. Infatti, gli oggetti che ci circondano si muovono a velocità molto basse rispetto a quelle della luce, per cui le formule classiche forniscono una buona approssimazione. Per questo motivo, alcuni comportamenti che non ci sono familiari ci appaiono apparentemente paradossali (e a volte anche contraddittori fra loro) e sembrano contraddire le ipotesi su cui la teoria è fondata.

L' automobile nel garage
Consideriamo un automobilista "relativistico" che voglia parcheggiare un' automobile lunga ℓ_0 in un garage lungo ℓ_g, con $\ell_g < \ell_0$, come rappresentato in figura.



Nel sistema di riferimento solidale con il garage, l' automobile apparirà lunga $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ e quindi basterà tarare la velocità in modo che $\ell = \ell_g$ affinchè l' auto entri nel garage.
Tuttavia, nel riferimento solidale all' automobile sarà il garage a muoversi con velocità v. Quindi per la contrazione delle lunghezze, $\ell'_g = \ell_g\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \ell_g < \ell_0$. Nel sistema di riferimento dell' automobile, il garage sarà sempre più corto e l' auto non riuscirà mai ad entrarvi.
Però il fatto che l' auto entri o non entri nel garage dovrebbe essere un evento indipendente dal riferimento. Ma chi dei due ha ragione? La questione può essere risolta solo capendo bene che cosa significhi misurare la lunghezza della macchina. Per compiere questa operazione è necessario misurare la posizione degli estremi dell' auto allo stesso istante. Nel riferimento del garage, quindi, l' automobile entra perfettamente in virtù delle formule di contrazione delle lunghezze.
Nel riferimento dell' auto, invece il garage, che si muove con velocità v, urta ad un certo istante t contro l'estremo O dell' auto. Tuttavia, tale informazione si propaga con velocità c verso il secondo estremo dell' auto, che nel frattempo si muove di un tratto $\Delta\ell = \frac{v\ell_0}{c}$. All' istante in cui è necessario effettuare la misura di posizione del secondo estremo, ovvero all'arrivo dell'informazione dell' urto avvenuto, la lunghezza della sbarra è diminuita, in modo da entrare nel garage.

Il paradosso dei gemelli
Anche la dilatazione dei tempi provoca apparenti paradossi. Consideriamo due gemelli A e B e supponiamo che uno di essi (B ad esempio) venga posto su un' astronave in moto con velovità v rispetto ad A. Dopo aver percorso una certa distanza ℓ l'astronave inverte la rotta e torna sulla Terra, sempre con velocità v.

Denotiamo con Δt_A il tempo che è trascorso fra la partenza ed il ritorno dell' atronave nel giudizio del gemello A e con Δt_B quello trascorso nel giudizio di B.
Utilizzando la formula di dilatazione dei tempi, è facile rendersi conto che lo scorrere del tempo del giudizio dei due osservatori è diverso. Infatti, con le identificazioni $\Delta t_A = \Delta t$ e $\Delta t_B = \Delta\tau$, si ottiene che

$$\Delta t_A = \frac{\Delta t_B}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t_B$$

Il gemello A valuta che sia trascorso un tempo più lungo e quindi sarà più vecchio di B. Il paradosso risiede nel fatto che anche B è fermo nel riferimento a lui solidale e valuta che A si allontana da lui con velocità v prima e si riavvicina con velocità v poi. Quindi il ragionamento può essere ribaltato concludendo che $\Delta t_A < \Delta t_B$, in contraddizione con quanto detto sopra.
La soluzione di questo paradosso risiede nel fatto che il sistema di riferimento solidale con B non si muove con velocità uniforme rispetto ad A ma cambia la sua velocità per tornare a ricongiungersi con il gemello. Le trasformazioni di Lorentz valgono solo per sistemi di riferimento che si muovono l'uno rispetto all' altro di moto rettilineo uniforme e quindi anche la formula di dilatazione dei tempi non può essere utilizzata, perchè le sue ipotesi non sono soddisfatte.
Tuttavia, il tempo scorre veramente in modo diverso nei due riferimenti e l' accelerazione richiesta per riportare indietro il gemello può durare un tempo trascurabile rispetto a tutta la durata del viaggio. Pertanto sembrerebbe che le formule di contrazione debbano essere una buona approssimazione di quello che in realtà succede. Ma quale delle due va utilizzata e perchè il comportamento non '"e più simmetrico quando si scambiano i due riferimenti?
Quello che in realtà succede è che per tutta la durata dell' accelerazione il gemello B subisce una forza apparente dovuta al fatto che il riferimento in cui si trova non è inerziale. Quindi la situazione non è più simmetrica, dal momento che il gemello A non subisce alcuna forza: questo fatto si riflette nella non simmetria del comportamento delle formule di dilatazione.
Per capire bene come si svolge effettivamente il fenomeno, torneremo sulla questione successivamente.

4 Formulazione quadridimensionale

4.1 Rappresentazione di Minkowski ridotta

La visualizzazione del moto in relatività speciale ha una particolare rappresentazione, che aiuta a visualizzare i nuovi concetti di tempo e spazio ed è dovuta a Minkowski. Dal momento che i concetti di spazio e tempo sono legati fra loro in modo profondo e l' ultimo non ha più un ruolo privilegiato, l' idea di Minkowski fu quella di visualizzare il moto in uno spazio a 4 dimensioni, detto spazio-tempo, in cui alle 3 usuali coordinate spaziali, si aggiungeva la quarta coordinata temporale $c\,t$, ovvero il tempo moltiplicato per la velocità della luce (che è indipendente dall' osservatore) per rendere il tutto dimensionalmente omogeneo.
Per aiutare la comprensione, ci limiteremo ad una versione ridotta di tale formalismo, in cui le 3 coordinate spaziali sono contratte in un' unica dimensione, rappresentata dall' asse x, mentre la quarta coordinata $w = c\,t$ è rappresentata lungo l' asse y.
L' evoluzione di un punto è rappresentato da una curva nel piano, detta *linea di universo*. Un punto fermo è ad esempio rappresentato dalla curva (A), che mostra un punto che non varia la sua posizione al variare del tempo. Un raggio di luce si muove a velocità c ed è quindi

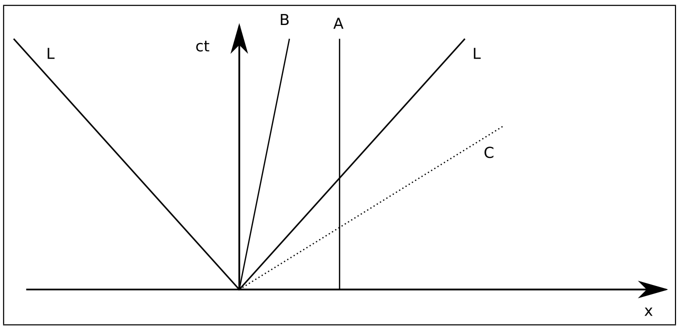


Figura 7: Rappresentazione ridotta di Minkowski dello spazio–tempo

rappresentato da una curva $x = w = ct$, ovvero dalla bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero dalla curva (L).
La curva (B) rappresenta il moto di un punto a velocità $v < c$. Infatti detto α l'angolo fra la curva (B) e l' asse $c\,t$ si ha che:

$$tg(\alpha) = \frac{x}{c\,t} = \frac{v}{c}$$

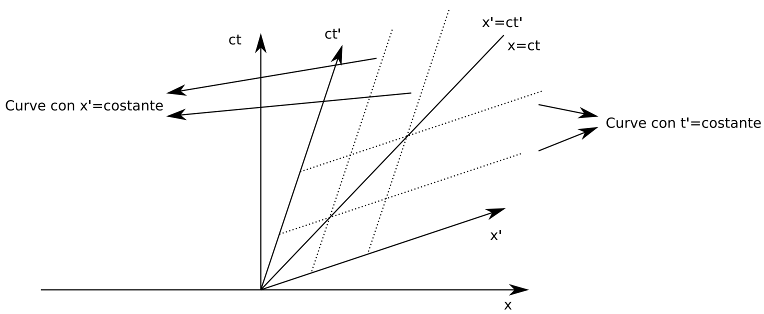
Se $tg(\alpha) < 1$ la velocità è minore di c, altrimenti è superiore. Quindi ogni curva come la (C) non rappresenta il moto di un punto materiale. Pertanto, tutte le curve che rappresentano un moto devono essere contenute all' interno dell' area compresa fra le due linee (L) contenenti l' asse $c\,t$.

4.2 Trasformazioni di Lorentz

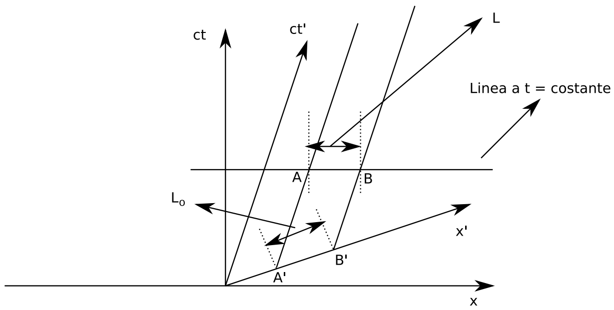
É interessante vedere come sia possibile descrivere le trasformazioni di Lorentz nella rappresentazione di Minkowski. Innanzi tutto, vediamo che il moto di un osservatore O' in moto rispetto a O con velocità v costante è rappresentato da una retta inclinata di un angolo $\alpha = arctg\left(\frac{v}{c}\right)$. Tale retta rappresenta *l'asse dei tempi dell' osservatore O'*, dal momento che quest' ultimo giudica di essere fermo nella sua origine nel riferimento a lui solidale.
L' asse spaziale dell' osservatore O' è invece costituito dall' insieme dei punti x' tali che $t' = 0$. Dalla (3.6) abbiamo che

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v\,x}{c^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = c\,t = \frac{v}{c}\,x$$

Essa è una retta che forma con l' asse x del riferimento O un angolo $\beta = \alpha = arctg\left(\frac{v}{c}\right)$. Il nuovo riferimento è rappresentato in figura. Come si può notare, gli assi non sono più



ortogonali fra loro. Inoltre i moti con velocità c sono descritti dalla medesima curva in entrambi i sistemi di coordinate, rendendone evidente l' invarianza.
In realtà la rappresentazione sopra, benché chiarisca a livello grafico il significato di invarianza della velocità della luce, risulta essere fuorviante. Infatti, il riferimento O' giudica i propri assi ortogonali fra loro, mentre saranno gli assi di O a non essere ortogonali nel suo giudizio. L' apparente dissimmetria può essere qualitativamente compresa dicendo che in realtà stiamo utilizzando il piano euclideo per descrivere un modello matematico che richiederebbe risorse più complicate. Infatti l' ambiente geometrico corretto per sviluppare la relatività speciale richiede una generalizzazione del concetto di ortogonalità che va al di la' di quella della geometria euclidea. Lo studio di questi nuovi concetti matematici è fondamentale per comprendere alcuni fenomeni relativistici ed in particolare per includere i sistemi di riferimento non inerziali nel discorso.
Tuttavia, quanto descritto sopra permette di visualizzare in maniera intuitiva le conseguenze cinematiche delle trasformazioni di Lorentz. Prendiamo ad esempio il fenomeno della contrazione delle lunghezze. Consideriamo una sbarretta di estremi A' e B' in quiete nel riferimento O' e descriviamone il moto utilizzando i diagrammi spazio-temporali. La situazione è visualizata in figura.



La lunghezza di riposo ℓ_0 è rappresentata dalla distanza fra i punti A' e B' misurata sull' asse x', e rimane uguale al variare di t': infatti le linee di universo di A' e B' sono paralleli all' asse t'. Per misurare la lunghezza nel riferimento O è necessario misurare la distanza fra A e B allo stesso tempo t. A tal fine consideriamo una linea a t costante e misuriamo la lunghezza ℓ come la distanza fra A e B su di essa. È evidente dal disegno che $\ell < \ell_0$.

4.3 La lunghezza invariante

La forza della descrizione quadridimensionale risiede nel fatto che lo spazio-tempo della relatività speciale possiede notevoli risorse geometriche. In particolare è possibile definire al suo interno una particolare "lunghezza" che è indipendente dalla scelta dell' osservatore.
A tal fine, riportiamo di seguito le equazioni (3.6), scritte nel linguaggio delle variabili (x, w):

$$\begin{cases} x' = & \gamma\left(x - \frac{v\,w}{c}\right) \\ w' = & \gamma\left(w - \frac{v\,x}{c}\right) \end{cases} \tag{4.1}$$

É immediato notare la simmetria delle equazioni. Consideriamo ora la quantità:

$$\sigma := x^2 - w^2 \tag{4.2}$$

Se utilizziamo le trasformazioni (4.1) otteniamo che:

$$x'^2 - w'^2 = \gamma^2 \left[\left(x - \frac{v\,w}{c} \right)^2 - \left(w - \frac{v\,x}{c} \right)^2 \right] = \gamma^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(x^2 - w^2 \right) \right] = x^2 - w^2$$

Questo significa che il numero $\sigma = x^2 - w^2$ è lo stesso, indipendentemente dal sistema di riferimento in cui si calcola.
La quantità σ prende il nome di lunghezza invariante ed assegna un numero ad ogni punto A dello spazio-tempo, che rappresenta una "distanza" di tale punto dall' origine. Come vediamo, questa non è una lunghezza vera e propria, dal momento che può anche assumere valori negativi. Questo fatto complica un po' le cose, ma aggiunge anche nuove possibilità. Ad esempio, rende possibile classificare le linee di universo passanti per l' origine che descrivono moti rettilinei uniformi a seconda del segno che assume σ su un qualunque punto della retta.
Consideriamo una linea di universo che descrive un raggio di luce, passante per l' origine. Essa è descritta come $w = x$ e, quindi, qualsiasi punto A di questa retta è tate che $\sigma(A) = 0$. Una curva di universo che descrive un raggio di luce viene pertanto detta *di tipo nullo*; qualunque suo punto ha distanza nulla dall' origine.
Una curva che descrive il moto di un punto è $x = v\,t = \frac{v}{c}\,w$, con $v < c$. Quindi se A appartiene a tale linea di universo si ha che

$$\sigma(A) = x^2(A) - w^2(A) = \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) w^2 = \frac{1}{c^2} \left(v^2 - c^2 \right) w^2 < 0$$

Una linea di universo che descrive un moto ammissibile, con velocità minore di quella della luce, è detta *di tipo tempo* ed è caratterizzata dal fatto che la distanza di ogni suo punto dall' origine è negativa.
Infine, le curve con σ positivo non descrivono l' evoluzione di alcun punto materiale e vengono dette di tipo spazio. Questo perchè esiste sempre un osservatore per cui tale linea giace sul proprio asse x (verificare per esercizio).