STAGES AL DIMA – 2006

"PASSEGGIATA CASUALE" NELLA PROBABILITA'

PROBLEMI E QUESITI DI PARTENZA

- Un sacchetto nero contiene 2 biglie rosse e 5 nere. Ho scommesso di riuscire a prendere due biglie di colore diverso, con due pescate consecutive senza reimbussolamento. Dopo aver estratto la prima biglia, sbirciando attraverso la mano, non perfettamente chiusa, vedo che è rossa. Quale probabilità ho adesso di vincere la scommessa? Se prima di procedere alla seconda estrazione un bimbo allunga la mano, prende una biglia e scappa, senza che si riesca a vedere di che colore è la biglia sotratta, qual è la probabilità che la seconda biglia sia rossa?

- Il Cavaliere di Méré pose al matematico Pascal il seguente quesito sul gioco dei dadi: "L'uscita di un 6 lanciando quattro dadi dovrebbe avere la stessa probabilità di avere almeno una coppia di 6 lanciando per 24 volte una coppia di dadi. Come mai il primo evento sembra verificarsi invece con maggiore frequenza del secondo?

- Una coppia di sposi spera di avere un figlio maschio, per non far estinguere il cognome del marito non essendoci altri parenti maschi sposati. Quattro figli di questi tempi sono troppi, perciò decidono di fare al massimo tre tentativi. Se nasceranno tre femmine, perciò non vi saranno ulteriori tentativi. Trova il numero medio di figli e di maschi che avrebbero le famiglie se tutte facessero la stessa scelta.

- Un gioco di dadi era molto frequente nel medioevo. Su un grande tavolo era disegnato un rettangolo diviso in 6 quadrati. I vari quadrati erano numerati da 1 a 6. Il banco invitava gli spettatori a puntare su uno dei sei numeri. Terminate le puntate, il banco gettava tre dadi. Chi aveva puntato sul numero uscito in uno qualsiasi dei tre dadi vinceva il valore della somma puntata. Se il numero usciva su due dadi la vincita raddoppiava. Se la fortuna faceva uscire il numero su tutte e tre le facce, la vincita triplicava. Ogni giocatore era convinto di arricchirsi, pensando: "Con un dado ho una probabilità su sei di vincere, ma con tre dadi la probabilità diventa il triplo, cioè 3 su 6, in pratica vinco o perdo con la stessa probabilità. Alla lunga dovrei andare in pari. Ma siccome ogni tanto mi capiterà di vincere il doppio della posta o addirittura il triplo, credo proprio che mi farò un bel gruzzolo!"

- **Numeri ritardatari:** tre giocatori usano tre strategie diverse per vincere una ambo al Lotto e incassare 250 volte la posta. Il primo punta sui numeri ritardatari, forte della convinzione che esse non possono continuare a a non uscire. Costui ascolta attentamente le trasmissioni dedicate al lotto e si reca due volte la settimana al botteghino scommettendo su un ambo formato da due numeri con maggiore ritardo. Il secondo fa invece il seguente ragionamento: "se un numero esce più spesso di altri, vuol dire che è un numero fortunato". Egli prende quindi nota dei risultati delle precedenti estrazioni e gioca un ambo formato dai due numeri fortunati, quelli che sono usciti più spesso. Non vorranno tradirlo proprio ora! Il terzo giocatore è invece un tipo abitudinario. La sua giornata è scandita da ritmi ben precisi, da atti compiuti sempre allo stesso modo. Figuriamoci se vuole prendersi la briga di cambiare gioco. Ha scelto una coppia di numeri e gioca ambo fisso, due volte alla settimana allo stesso bar. "Prima o poi dovrà uscire" dice al barista, al quale aveva chiesto quali numeri poteva scegliere per giocare un ambo. "Due numeri qualsiasi da 1 a 90", aveva risposto il barista. "bene giocherò i numeri 1 e 2". Quale dei nostri tre giocatori riuscirà a vincere più spesso?

- **Il problema del ballottaggio:** Supponiamo che durante l'elezioni il candidato A riceva a voti e il candidato B ne riceva b, con b<a. Qual è la probabilità che il candidato A sia sempre avanti a B nel conteggio dei voti? Questo famoso problema fu risolto nel 1887 da Joseph Louis Bertrand.

- **RIASSUNTO DELLA TEORIA "SFIORATA"**

Supponiamo che X_1, X_2, … siano variabili casuali a valori reali, indipendenti e identicamente distribuite (in particolare tutte con la stessa media μ).

Ricordiamo che la media di una variabile X a valori discreti è definita come $\sum_k kP(X=k)$.

La somma parziale n-esima è la variabile casuale

$$Y_n=X_1+\ldots+X_n$$

Il processo Y_0, Y_1, Y_2,… è detto **random walks** (passeggiata aleatoria). Tale termine deriva dal fatto che possiamo pensare gli Y_n come posizione al tempo n di un passeggiatore che fa passi successivi X_1, X_2, …. Il grafico dei valori di Y_n in funzione di n è detto sentiero del random walk.

Ricordiamo che in termini statistici (X_1, X_2, …, X_n) è un campione casuale di dimensione n proveniente da una distribuzione X, qualunque sia n.

La media campionaria è semplicemente la media delle variabili del campione $\overline{X}_n=Y_n/n$.
La media campionaria è anch'essa una variabile casuale con la sua media. In molti casi la media della distribuzione è ignota, e si usa la media campionaria come stimatore della media della distribuzione.
La **legge dei grandi numeri** afferma che la media campionaria converge (in probabilità) alla media della distribuzione. In formule

$$P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)\to 0 \text{ quando n tende a infinito per ogni } \varepsilon \text{ reale positivo}$$

Consideriamo un caso particolare di random walk. Supponiamo che, ogni X_i assuma valori 1 e –1 con probabilità 1/2. In questo caso Y_0, Y_1, Y_2,… è detto random walk semplice e simmetrico.
I problemi "classici" collegati ai random walks semplici e simmetrici, sono con quale probabilità viene raggiunta la posizione massima $M_n=\max(Y_0, Y_1, Y_2,\ldots)=k$ nei primi n passi (Il risultato è sorprendente: il valore singolo più probabile per il massimo è lo ZERO!), oppure l'ultimo passaggio a zero negli ultimi 2n passi. In entrambe i casi si utilizza un'idea semplice e affascinante detta **principio di riflessione**: il numero di cammini che partono da A>0 e arrivano dopo n passi in B>0 e passano da Zero coincide con il numero di cammini che partono da –A e arrivano in B.