PROBABILITÀ - SCHEDA N. 1
INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ

1. Che cos'è la probabilità?

«La teoria delle probabilità non è altro che il tentativo del genere umano di comprendere l'incertezza dell'universo, di definire l'indefinibile» (così scrive A.D. ACZEL, un divulgatore scientifico israeliano, laureato in matematica a Berkeley). Questa, naturalmente, non è una definizione; tuttavia, pur sembrando la probabilità un concetto intuitivo, quasi istintivo, non è semplice (neanche per i matematici) avere una definizione di probabilità che si possa applicare in ogni situazione e che possa rispondere a tutte le aspettative.

Perché parliamo di probabilità?
Conosciamo e incontriamo spesso in natura, in economia, nella nostra vita quotidiana, fenomeni che sembrano avere caratteristiche di casualità. Molto spesso questa casualità è solo apparente e potrebbe essere dovuta a una serie di fattori che, pur essendo deterministici, possono non essere completamente noti o avere una spiegazione troppo complessa.

> **ESEMPIO 1.** Nel lancio di una moneta il singolo risultato è incerto; in effetti sono incerte le velocità iniziali di traslazione e di rotazione, la situazione termica ambientale, è incerto il piano d'arrivo, e così via. Teoricamente si potrebbe trasformare il lancio della moneta in un fenomeno dal risultato "praticamente" certo se si tenesse conto di tutte queste condizioni. Però è più comodo adottare un altro punto di vista che rinuncia alla descrizione analitica del fenomeno e attribuisce i diversi esiti dell'esperienza a una variabilità accidentale, intesa come sintesi delle diverse condizioni che si rinunciano a specificare.

In queste schede mostreremo che è utile avere conoscenze di tipo probabilistico per studiare la realtà e per ottenere nuove informazioni dai dati.
Per prima cosa, riflettiamo sulle seguenti domande o affermazioni:
- Nel gioco del lotto ci sono numeri fortunati.
- In una famiglia ci sono 4 figli maschi: il prossimo sarà ancora maschio.
- In una famiglia ci sono 4 figli maschi: il prossimo sarà una femmina.
- Qual è la probabilità che in questo minuto in Piazza Dante avvenga un incidente stradale? Come fa una compagnia d'assicurazioni a prevedere la media degli incidenti in una città?
- Lanciando un dado a sei facce, qual è la probabilità che esca un numero pari?
- Lanciando due dadi, uno rosso e uno bianco, a sei facce, qual è la probabilità che escano due numeri pari?
- Lanciando due dadi, uno rosso e uno bianco, a sei facce, qual è la probabilità che la somma dei numeri sulle due facce sia 2?
- La fortuna è cieca.
- La fortuna è cieca ma la sfiga ci vede benissimo.

Possiamo pensare che la probabilità misuri la nostra fiducia che un evento si possa verificare: se siamo sicuri che qualcosa accadrà gli assegneremo probabilità 1 (o equivalentemente 100%); se siamo certi che sia impossibile gli assegneremo valore 0. Per tutti gli altri casi, dovremo capire quale valore compreso fra 0 e 1 sia ragionevole assegnare.

Nel caso di dadi o monete sembra intuitivo rispondere che la probabilità che un evento si verifichi sia il rapporto fra il numero di *casi favorevoli* e il numero di *casi possibili*. Questa caratterizzazione è stata la

prima ad essere formalizzata nel 1600 per situazioni legate ai giochi d'azzardo, ma presenta problemi. Innanzitutto bisogna definire che cos'è un *caso*.
Inoltre, tale definizione si basa sull'assunzione dell'*uguale probabilità dei casi*, che però non è sempre verificata; facciamo alcuni esempi.

- Nel lancio di due dadi, la somma dei valori uguale a 2 non ha la stessa probabilità della somma uguale a 5.
- Supponi di giocare a "testa o croce" con una moneta non truccata (ciascuna faccia esce con uguale probabilità). Se esce testa vinci 5 euro, se esce croce paghi 1 euro: il gioco non è "equo", nel senso che è più probabile che tu vinca dei soldi piuttosto che perdene. Se invece la moneta fosse truccata e "croce" uscisse con frequenza 5 volte maggiore rispetto a testa, allora il gioco sarebbe equo. In una moneta truccata le facce non sono equiprobabili.
- La roulette è "facilmente" truccabile con una calamita nascosta. La pallina non raggiunge allo stesso modo tutte le caselle.
- Come possiamo valutare la probabilità che domani piova? Gli esiti possibili sono {piove, non piove}, ma non sono in generale equiprobabili. Se però sapessimo che domani è il 31 gennaio, e che negli ultimi 100 anni il 31 gennaio è piovuto 25 volte, (e se non abbiamo altre informazioni, come ad esempio le foto del satellite, che ci portino a dire che sta arrivando una perturbazione) potremo valutare la probabilità di pioggia come se dovessimo estrarre una pallina da un'urna con 25 palline nere (piove) e 75 gialle (non piove), ottenendo una probabilità di 25/100.

Infine non è detto che si possano "contare" i casi favorevoli e i casi possibili. Nell'ultimo esempio sulla pioggia del 31 gennaio, la previsione deve tener conto anche della "storia" della situazione meteorologica dei giorni che precedono il 31 gennaio; in questo caso i casi favorevoli e i casi possibili non sono ben definiti.

Molti fenomeni reali non sono quindi "equiprobabili" ma lo studio della probabilità applicata ai giochi, ai lanci di monete non truccate, alle estrazioni da un'urna permette di costruire semplici modelli che possono essere poi opportunamente arricchiti per arrivare a modelli più complessi.

Per iniziare a valutare le probabilità di alcuni eventi, per esempio con quale probabilità esce testa in una moneta truccata, è ragionevole "provare" la moneta, ossia effettuare qualche lancio. Lanciarla un congruo numero di volte e tenere conto della frequenza degli esiti è un buon modo per valutare la probabilità di ottenere testa. Lo sappiamo dall'esperienza; ce lo suggeriscono considerazioni sensate e intuitive. In sostanza constatiamo, o semplicemente ci fidiamo del fatto che, ripetendo più volte un esperimento, nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento che riguarda quell'esperimento è una buona valutazione della probabilità dell'evento stesso ed è tanto più affidabile quanto maggiore è il numero di prove. A questa "legge", la cui validità è suggerita dall'esperienza, si è attribuito il nome di "**legge empirica del caso**".
Nel lancio di una moneta a due facce non truccata, la frequenza relativa, all'aumentare del numero di lanci tende a 0.5 (ricorda che non è assolutamente detto che il numero *t* delle teste tenda a essere uguale al numero *c* delle croci! ... Perché? È la frequenza relativa dell'evento "esce testa" che tende a essere uguale alla frequenza relativa dell'evento "esce croce").

Possibili esperienze (descritte in fondo alla scheda)

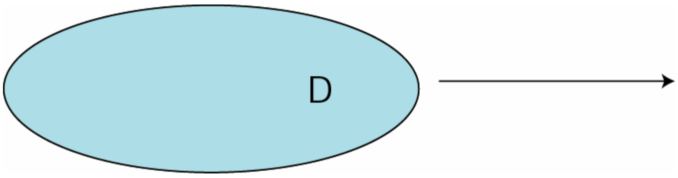
E1. Il lancio di dadi
E2. Il raggio cosmico
E3. L'estrazione da un'urna

2. Dalla statistica alla probabilità

In molte situazioni - come già osservato - è noto che, anche se il singolo risultato è incerto, c'è un esito a lungo termine *prevedibile*. In generale, per lo studio di un fenomeno che manifesta casualità, è necessaria l'osservazione ripetuta dello stesso fenomeno nelle identiche condizioni; per identiche condizioni si intende appunto che i fattori controllabili che influenzano il fenomeno assumano le stesse caratteristiche; tutti i fattori non controllabili potranno essere differenti e saranno quelli che generano la casualità del fenomeno.
Le regolarità evidenziate dai fenomeni casuali ripetuti sono l'oggetto di studio della teoria della probabilità. La nozione di probabilità è utile in quanto permette di introdurre un modello teorico della variabilità che consente di prevedere il comportamento anche di tutti i casi non esaminati.

> **ESEMPIO 2** Mendel nella metà del secolo scorso ha formulato alcune leggi (macroscopiche) sull'ereditarietà dei caratteri studiando le manifestazioni ripetute di un certo evento e utilizzando le leggi della probabilità; i suoi risultati sono stati confermati circa un secolo più tardi quando sono state scoperte le cause microscopiche che regolano i fenomeni ereditari.
> Mendel ha incrociato piante di piselli con semi gialli e semi verdi omozigoti: alla prima generazione ha trovato tutti piselli con semi gialli; incrociando fra loro questi piselli, alla seconda generazione, su 8023 piselli ha trovato il 75.1% di piselli con semi gialli e il 24.9% di semi verdi. Altri studiosi hanno ripetuto questo tipo di esperimento e sono stati necessari molti esperimenti per trovare la frequenza relativa dei piselli con semi gialli ipotizzata da Mendel con le sue leggi (75%). Incrociando poche piante della seconda generazione non si sarebbe ottenuto il risultato previsto.

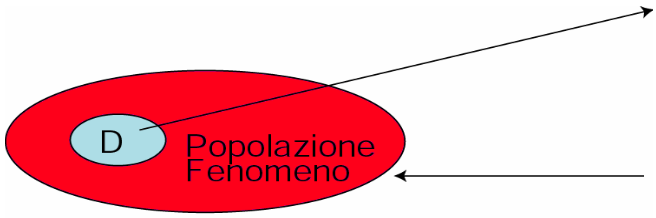
Una volta raccolti i dati e sintetizzate le informazioni con grafici e indici numerici si possono valutare le probabilità in base alle frequenze osservate.



analisi dei dati osservati

Questo modo di introdurre le valutazioni sulla probabilità a partire da esperienze ripetute comporta però alcuni problemi. Infatti, oltre a non essere possibile fare un numero “infinito” di esperimenti, molto spesso i dati osservati sono solo una parte, a volte anche piccola, della popolazione o del fenomeno che interessa studiare. Questo succede sia quando si volgiono limitare i costi, di tempo o di denaro, nella raccolta delle informazioni, sia quando non è proprio possibile avere informazioni complete. Per esempio quando si fa un sondaggio di opinioni sulle preferenze degli elettori prima di fare le elezioni generali (intervistare tutti gli elettori equivarrebbe a fare l’elezione); oppure quando si vuol conoscere la durata media, o tempo medio di vita, di un tipo di lampadine (se si tenessero accese tutte le lampadine fino a che non bruciano, poi non si potrebbero più vendere); o, ancora, quando si vuol prevedere la temperatura o il tempo meteorologico (non si può conoscere il futuro, ma ci si può basare sulle osservazioni passate), eccetera.

Siamo interessati a costruire un modello probabilistico che parta dall’esperienza, ma che abbia una sua consistenza formale capace di descrivere i fenomeni e di valutare le inevitabili approssimazioni commesse nel passaggio dalle informazioni parziali dei dati osservati a considerazioni sull’intera popolazione o sull’intero fenomeno.



analisi dei dati osservati

calcolo delle probabilità

informazioni sulla popolazione o sul fenomeno

3. Gli eventi e le loro probabilità

Per poter trovare un “buon” modello matematico che possa descrivere più fenomeni possibili (e non solo il lancio dei dadi), abbiamo bisogno innanzitutto di capire quali sono gli oggetti di cui siamo interessati a calcolare le probabilità. Parliamo quindi di **esperimenti aleatori** ed **eventi:** i primi indicano un esperimento di cui non è possibile conoscere con certezza la risposta prima di averlo compiuto (per esempio il lancio di un dado); gli eventi, invece, costituiscono un possibile esito dell’esperimento aleatorio (per esempio “la faccia in alto ha 5 pallini”).

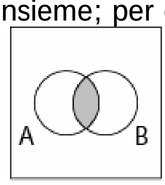
Definiamo lo **spazio campionario** Ω (o spazio delle osservazioni) come la totalità degli esiti possibili di un esperimento casuale.
I sottoinsiemi dello spazio campionario sono gli **eventi** che in genere sono indicati con le lettere maiuscole: A, B, E, A_1, A_2, … Gli eventi possono essere anche rappresentati con proposizioni. I sottoinsiemi formati da un solo elemento sono chiamati eventi elementari.
Per esempio, nel lancio di due dadi lo spazio campionario è composto da 36 elementi:

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); (2,3);...; (6,6)\}$$

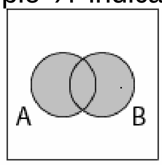
e “la somma dei pallini sulla faccia in alto dei due dadi è uguale a 3” è un evento e coincide con il sottoinsieme $\{(1,2); (2,1)\}$, “la faccia in alto del primo dado ha un pallino e la faccia in alto del secondo dado ha due pallini” è un evento elementare.
L'insieme vuoto $\varnothing$ e Ω sono sottoinsiemi di Ω che vengono sempre interpretati come eventi; $\varnothing$ rappresenta un qualunque *evento impossibile* e Ω rappresenta la totalità dei possibili risultati che è l'*evento certo*.

Nell'esempio del lancio del dado l'evento “la faccia in alto ha un numero di pallini compresi fra 1 e 6” è un evento certo; l'evento “la faccia in alto ha più di ventitrè pallini” è un evento impossibile.
La totalità degli eventi che interessa studiare corrisponde a una famiglia di sottoinsiemi di Ω.

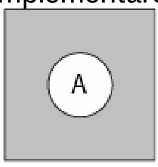
L'identificazione fra eventi e sottoinsiemi di Ω permette di trasportare sugli eventi le operazioni insiemistiche di unione ($\cup$), intersezione ($\cap$) e passaggio al complementare (indicato con una linea sopra alla lettera che indica l’insieme; per esempio $\overline{A}$ indica il complementare di A in Ω).



A∩B



A∪B



$\overline{A}$

Il significato intuitivo di queste operazioni riferite agli eventi è facile: se A e B sono sottoinsiemi di Ω corrispondenti a due eventi allora:

- $A \cap B$ (indicato anche $A\, e\, B$) corrisponde all'evento “i due eventi A e B si verificano entrambi”
- $A \cup B$ (indicato anche $A\, o\, B$) corrisponde all'evento “si verifica almeno uno dei due eventi A e B”
- $\overline{A}$ (indicato anche non$A$) corrisponde all'evento “l'evento A non si verifica”.

ESEMPIO 3. Si lanciano contemporaneamente tre monete e si osserva quale faccia appare su ciascuna di esse. Questo esperimento ha otto risultati possibili. Quindi, usando una terna in cui si registrano nella prima posizione il risultato della prima moneta, nella seconda il risultato della seconda moneta e nella terza il risultato della terza moneta, avremo che lo spazio degli eventi è:

$$\Omega = \{(T, T, T), (T, T, C), (T, C, T), (C, T, T), (T, C, C), (C, T, C), (C, C, T), (C, C, C)\}$$

Gli eventi A_i “uscita di *esattamente* i teste”, con i = 0, 1, 2, 3 sono:

- $A_0 = \{(C,C,C)\}$
- $A_1 = \{(T,C,C),\ (C,T,C),\ (C,C,T)\}$
- $A_2 = \{(T,T,C),\ (T,C,T),\ (C,T,T)\}$

- $A_3 = \{(T,T,T)\}$

Gli eventi B_i “uscita di *almeno i* teste”, con i = 1, 2, 3 sono:

- $B_1 = \{(T,C,C),(C,T,C),(C,C,T),(T,T,C),(T,C,T),(C,T,T),(T,T,T)\}$
- $B_2 = \{(T,T,C),\ (T,C,T),\ (C,T,T),\ (T,T,T)\}$
- $B_3 = \{(T,T,T)\}$

Essendo Ω finito, tutti i suoi sottoinsiemi sono eventi.

ESEMPIO 4. Il peso dei cuccioli di una specie animale alla nascita varia da 2 a 6 kg. In questo caso l'insieme dei possibili risultati è un intervallo della retta reale: Ω = [2, 6]. Anche in questo caso possiamo mettere in corrispondenza gli eventi di cui vogliamo calcolare la probabilità con dei sottoinsiemi di Ω. Ad esempio il sottoinsieme [2, 3.5) corrisponderà all'evento “un cucciolo alla nascita ha un peso maggiore o uguale a 2 kg e minore di 3.5 kg”.

Possibile esperienza (descritta in fondo alla scheda)

E4. Complementare, unione, intersezione di eventi e loro probabilità.

4. La funzione di probabilità

Da quanto visto in precedenza, quando abbiamo assegnato una probabilità, ovvero un valore numerico alla fiducia del verificarsi di ogni evento, abbiamo definito una funzione P che associa a ogni evento un numero compreso tra 0 e 1.
Due caratteristiche “ragionevoli” che richiediamo per questa funzione sono:

- la probabilità di tutti i possibili risultati deve essere uguale a 1
$$P(\Omega)=1$$
- la probabilità che si verifichi l’unione di eventi incompatibili (ciò significa che gli insiemi che rappresentano i due eventi sono disgiunti) deve coincidere con la somma delle probabilità dei singoli eventi:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \quad \text{se } A\cap B=\varnothing$$

Una funzione che soddisfa queste condizioni è detta **funzione di probabilità**.

Le condizioni precedenti (estese anche al caso di un numero infinto di eventi) sono quelle che hanno permesso, all’inizio del XX secolo, di costruire la moderna teoria della probabilità. Osserviamo che, nel precisare le caratteristiche che deve avere una funzione di probabilità, non si è detto come assegnare la probabilità di un evento, ma si sono solamente imposte alcune condizioni su tali valori.

5. Probabilità condizionata e indipendenza

ESEMPIO 5. Consideriamo una popolazione di animali di cui esistono solo due specie 1 e 2. La probabilità che un animale scelto a caso fra la popolazione totale sia affetto da una malattia e appartenga alla specie 1 è il 13,5% e la probabilità che sia affetto da una malattia e appartenga alla specie 2 è il 9%. La probabilità che un animale scelto a caso fra la popolazione totale sia della specie 1 è il 65% della popolazione. Tutti questi dati possono essere riassunti nella tabella 1.
I dati sono espressi in forma percentuale.

Specie/Malattia	M	$\overline{M}$	TOT
S1	13.5		65.0
S2	9.0		35.0
TOT			

Tabella 1.

Questa tabella si può completare in modo che l'ultima colonna sia la somma dei valori delle righe e che l'ultima riga sia la somma dei valori delle colonne. Ad esempio la probabilità che un animale risulti malato è 0.225 (=0.135+0.09).
Quindi la tabella completata è:

Specie/Malattia	*M*	$\overline{M}$	TOT
S1	13.5	51.5	65.0
S2	9.0	26.0	35.0
TOT	22.5	77.5	100

Tabella 2. Probabilità congiunta

La tabella 2 ci dice, per esempio, che la probabilità che un animale della popolazione appartenga alla specie 1 e sia malato è 0,135. Qual è la probabilità che un animale della popolazione appartenga alla specie 2 e non sia malato?

Se vogliamo invece conoscere qual è la probabilità che un animale della specie 1 (o della specie 2) sia affetto o meno dalla malattia, dobbiamo calcolare il rapporto fra la probabilità di essere malato rispetto alla probabilità della specie, ottenendo la seguente tabella (che si chiama anche tabella dei profili riga)

Specie/Malattia	*M*	$\overline{M}$	TOT
S1	21	79	100
S2	26	74	100

Tabella 3. Probabilità condizionata sulle righe

Quindi, la probabilità che un animale della specie 1 sia affetto dalla malattia è 0.21; invece la probabilità che un animale della specie 2 sia affetto dalla malattia è 0.26. Questo introduce il concetto di probabilità condizionata, che consente di affrontare il problema di vedere come varia la probabilità di un evento quando un altro evento si è realizzato.
Qui sotto sono riportate le probabilità che un animale malato /non malato provenga dalla specie 1 o dalla specie 2; le probabilità sono scritte in forma percentuale.

Specie/Malattia	*M*	$\overline{M}$
S1	60.0	66.5
S2	40.0	33.5
TOT	100	100

Tabella 4. Probabilità condizionata sulle colonne

In altri termini, la tabella 4 precisa che la probabilità che un animale malato appartenga alla specie 1 è 0,6. Qual è la probabilità che un animale non affetto da malattia appartenga alla sepcie 2?

Consideriamo due eventi A e B, con P(B)>0. Si dice **probabilità condizionata** di A sapendo B (e si indica con **P(A|B)**) il rapporto

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Questa definizione richiama la costruzione delle tabelle profilo.

La probabilità che si verifichi A e (anche) B, ossia $P(A \cap B)$, è quindi data da

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B) \qquad \text{oppure} \qquad P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

Che cosa significa se si verifica: P(A|B)= P(A)?
In questo caso possiamo affermare che l'essersi verificato B non fa variare la valutazione della probabilità che si verifichi A; ciò equivale a dire che B non influenza A (questo implica che A non influenza B?, ricorda

quanto abbiamo visto in statistica descrittiva). Diremo quindi che, in questo caso, A e B sono **indipendenti.** Notiamo che A e B sono indipendenti se e solo se

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

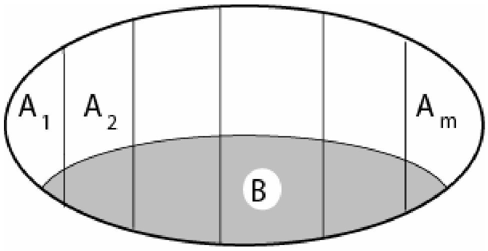
Ritornando alla rappresentazione tramite tabelle, questo significa che ogni cella deve essere completata con il prodotto delle marginali (anche questo si ritrova nella parte di statistica).

6. La formula della probabilità totale e la formula di Bayes

Riprendiamo l'Esempio 5.
Abbiamo visto in Tabella 2 che la probabilità che un animale risulti malato (prima cella della marginale colonna) è la somma della probabilità di due eventi disgiunti ($S1 \cap M$) e ($S2 \cap M$). Quindi

$$P(M) = P(S1 \cap M) + P(S2 \cap M).$$

Questa formula si può generalizzare ogniqualvolta si possa ricoprire lo spazio campionario con un numero finito di eventi *disgiunti* A_1, A_2,...,A_m.



Tale generalizzazione è detta **formula della probabilità totale:**

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_m).$$

Si può anche scrivere come:

$$P(B) = P(B|A_1)\, P(A_1) + P(B|A_2)\, P(A_2) + \dots + P(B|A_m)\, P(A_m).$$

ESEMPIO 6. Consideriamo una malattia M che colpisce il 5% di una varietà A di piante e il 12% di una seconda varietà B. Le piante della varietà A rappresentano il 70% della popolazione. Usiamo queste frequenze osservate come valutazioni delle corrispondenti probabilità.
Si osserva che una pianta è affetta dalla malattia. Qual è la probabilità che la pianta appartenga alla varietà A?
Sappiamo, quindi, che
$P(M|A)=0.05$, $P(M|B)=0.12$, $P(A) = 0.70$, $P(B)=0.30$.
Calcoliamo:

$$P(A\ e\ M) = P(A) * P(M \mid A) = 0.70 \times 0.05 = 0.035$$

$$P(B\ e\ M) = P(B) * P(M \mid B) = 0.30 \times 0.12 = 0.036$$

Quindi la probabilità (totale) che una pianta sia malata è

$$P(M) = P(M \cap A) + P(M \cap B) = P(A)P(M|A) + P(B)P(M|B) = 0.05 \times 0.7 + 0.12 \times 0.3 = 0.071$$

Completiamo la tabella

Specie/Malattia	M	$\overline{M}$	TOT
A	3.5		70
B	3.6		30
TOT	7.1		100

Quindi la risposta alla domanda "Qual è la probabilità che la pianta appartenga alla varietà A?" è

$$P(A\,|\,M)=\frac{P(M\cap A)}{P(M)}=\frac{0.05\text{x}0.7}{0.071}=0.49$$

La colonna dei non malati si completa per differenza: $P(A \text{ e } \overline{M})=P(A)-P(A \text{ e } M)$ = 0.70-0.035 = 0.665 e $P(B \text{ e } \overline{M})=P(B)-P(B \text{ e } M)$ = 0.30-0.036 = 0.264

Come nell'esempio precedente, in alcuni contesti può essere più facile avere informazioni sulle probabilità condizionate $P(B|A_k)$ piuttosto che sulle probabilità congiunte $P(B\cap A_k)$.
Queste proabilità condizionate e la formula della probabilità totale ci permettono di calcolare "altre" probabilità condizionate.

Si ottiene che

$$P(A_k\,|\,B)=\frac{P(B\cap A_k)}{P(B)}=\frac{P(B\,|\,A_k)P(A_k)}{P(B\,|\,A_1)P(A_1)+\;P(B\,|\,A_2)P(A_2)+\ldots+\;P(B\,|\,A_m)P(A_m)}$$

Questa è detta **formula di Bayes.**

ESEMPIO 7. Per valutare se un individuo ha una malattia grave, si effettuano spesso dei test diagnostici facili da fare e poco costosi su una parte *estesa* della popolazione (tipicamente sui soggetti a rischio o su tutti); ciò succede con malattie come l'HIV, ma anche per fare diagnosi prenatali, per esempio per la sindrome di Down. Questi test in genere non sono invasivi ma devono essere considerati solo di "preallerta"; hanno infatti il difetto che non danno un risultato "sicuro". Se un individuo risulta positivo a questo test, si decide di sottoporlo accertamenti più accurati per verificare se ha effettivamente la malattia. Bisogna valutare in termini probabilistici gli errori che si commettono.
Indichiamo con M e con $\overline{M}$ gli eventi "avere/non avere la malattia" e con + e con – gli eventi "risultare positivo/negativo al test".
Avremo quindi che il test fornisce il risultato corretto quando un individuo che è malato viene indicato come positivo e quando un individuo che è sano viene indicato come negativo; le probabilità di avere un responso corretto sono quindi $P(+\,|\,M)$ e $P(-\,|\,\overline{M})$. Queste in genere sono piuttosto alte (superiori al 95%) e sono conosciute dagli sperimentatori (vengono valutate precedentemente su un campione accuratamente studiato).
Quando una persona *ha la malattia*, il test può essere positivo (positività vera) o negativo (negatività falsa). Così, quando una persona *non ha la malattia*, il test può essere positivo (positività falsa) o negativo (negatività vera).

		malattia	
		si	no
risultato esame	positivo	$P(+\,\|\,M)$	$P(+\,\|\,\overline{M})$ tasso di **falsi positivi**
	negativo	$P(-\,\|\,M)$ tasso di **falsi negativi**	$P(-\,\|\,\overline{M})$
		1	1

Il problema che ci si pone è: *qual è la probabilità che un individuo risultato positivo al test sia effettivamente malato?* Cioè quanto vale $P(M\,|+)$. Se la malattia è piuttosto rara nella popolazione il risultato può sconcertare a prima vista.

Consideriamo una grave malattia che nella popolazione sia piuttosto rara, la cui probabilità è:

$$P(M) = 0.001$$

(ciò implica che la probabilità che un individuo esratto a caso dalla popolazione sia non malato è 0.999).

Il test che viene effettuato sul maggior numero di soggetti a rischio ha queste probabilità di risultare corretto:

$$P(+\,|\,M) = 0.95 \quad \text{e} \quad P(-\,|\,\overline{M}) = 0.98$$

Ci chiediamo quindi *qual è la probabilità che un individuo risultato positivo al test sia effettivamente malato,* ossia vogliamo sapere quanto vale $P(M\,|\,+)$.

Possiamo intanto costruire la seguente tabelle delle probabilità condizionate:

Test/Malattia	M	$\overline{M}$
+	95	2
-	5	98
TOT	100	100

Usando la legge della probabilità composte possiamo calcolare:

a) $P(+\cap M) = P(M)P(+\,|\,M)$, quindi $P(+\cap M) = 0.001*0,95 = 0.00095$

b) $P(-\cap \overline{M}) = P(\overline{M})P(-\,|\,\overline{M})$ quindi $P(-\cap \overline{M}) = = 0.999*0.98 = 0.97902$

Siamo quindi in grado di costruire la tabella delle probabilità congiunte con i dati che abbiamo ottenuto.

Test/Malattia	M	$\overline{M}$	TOT
+	0.095		
-		97.902	
TOT	0.100	99.900	100

E di riempire le caselle ancora vuote con semplici calcoli (quali?)

Test/Malattia	M	$\overline{M}$	TOT
+	0.095	1.998	2.093
-	0.005	97.902	97.907
TOT	0.100	99.900	100

Siamo ora in grado di rispondere a qualunque domanda relativa a questa distribuzione di probabilità congiunte, in particolare siamo in grado di calcolare $P(M\,|\,+)$. Infatti:

$$P(M\,|\,+) = \frac{P(M\cap +)}{P(+)} = \frac{0,095}{2,093} = 0.045$$

Osserviamo che, ovviamente, si sarebbe ottenuto lo stesso risultato applicando direttamente il teorema di Bayes

$$P(M\,|\,+) = \frac{P(M)P(+\,|\,M)}{P(+\,/\,M) + P(+\,/\,\overline{M})} = 0.045$$

Quindi “solo” il 4.5%. Non certo così alta come si aspetterebbe un individuo che, purtroppo, dovesse essere risultato positivo al test. Perché questo risultato?

Il fatto è che la malattia è molto rara: prendendo un individuo a caso dalla popolaziione, la probabilità che sia affetto dalla malattia è solo 0,001: il test positivo fa drammaticamente salire questa probabilità a 0,045 (che è 45 volte maggiore), ma la probabilità rimane bassa, perché bassissima era quella prima di ottenere le informazioni con il test. Naturalmente le cose cambierebbero drasticamente se l’individuo che ha effettuato il test fosse stato scelto da una popolazione a rischio oppure avesse sintomi che suggeriscono la presenza della malattia: in questo caso non potrebbe più considerarsi un individuo “estratto a caso” dalla popolazione.

E1. Esperienza: il lancio dei dadi

L'esperienza può essere effettuata materialmente con dadi o usando un foglio di calcolo

Alcune prove:

- Lanciamo un dado: diamo una valutazione della probabilità che esca un numero pari
- Lanciamo due dadi: diamo una valutazione della probabilità che
    - o escano due numeri pari
    - o la somma dei due numeri sia 2
    - o la somma dei due numeri sia 5
- Lanciamo un dado 6 volte (oppure 6 dadi contemporaneamente): diamo una valutazione della probabilità che escano tutti numeri diversi.

Come cambiano le valutazioni precedenti se si effettuano 10 lanci, 50 lanci, 100 lanci, ...?

E2. Esperienza: il raggio cosmico

Consideriamo un quadrato di lato 500 m al cui interno, in posizione centrale, c'è un quadrato di lato 300 m. Supponiamo si tratti di un campo.
Consideriamo solo i raggi cosmici che colpiscono il campo (cioè il quadrato di lato 500 m). Qual è la probabilità che un raggio cosmico colpisca il quadrato interno?

Innanzittutto commentare le ipotesi sul campo e sul raggio cosmico.

Dopo aver dato una valutazione "teorica" effettuare una simulazione usando un foglio di calcolo.

a. generare 10000 numeri casuali fra 1 e 5 in due colonne, indicate con X e Y che indicano la posizione del raggio nel campo
b. scrivere una relazione logica (usando if, and, or, ...) per indicare se il raggio sta o no nel quadrato interno

E3. Esperienza: estrazione da un'urna

Simulate 50 estrazioni di una pallina da un'urna che ne contiene dodici numerate (da 1 a 12), indistinguibili alla vista e al tatto. Valutate la probabilità che esca una pallina pari per 10 volte su 50.

a. Come stabilire se un numero è pari?
b. Discutere come strutturare il foglio di calcolo

E4. Esperienza: complementare, unione, intersezione di eventi e loro probabilità

Discutete i seguenti problemi.

1. Consideriamo il lancio di un dado non truccato e come eventi (equiprobabili) il numero di pallini sulla faccia in alto. Qual è la probabilità:
    - che esca il 5? che esca un numero diverso da 5?
    - che esca il 2? che esca il 3? che esca il 2 *oppure* che esca il 3?
    - che esca un numero pari? che esca un numero più piccolo di 3? che esca un numero pari *oppure* che esca un numero più piccolo di 3? che esca un numero pari *e* (anche) più piccolo di 3?

2. Consideriamo il lancio di due dadi non truccati e come eventi (equiprobabili) il numero di pallini sulle facce in alto di ciascun dado. Qual è la probabilità:
    - che esca il 2 sul primo dado? che esca il 3 sul secondo dado? che esca il 2 sul primo *oppure* che esca il 3 sul secondo?

- che esca un numero pari sul primo? che esca un numero più piccolo di 3 sul secondo?
  che esca un numero pari sul primo *oppure* che esca un numero più piccolo di 3 sul secondo?
  che esca un numero pari sul primo *e* un numero più piccolo di 3 sul secondo?

3. Consideriamo l'estrazione di una carta da un mazzo da 40. Qual è la probabilità
   - che sia rossa?
   - che sia un asso?
   - che sia un asso rosso?