CALCOLO COMBINATORIO

Il calcolo combinatorio si occupa di contare i raggruppamenti che si possono fare con n oggetti di un insieme finito, secondo determinate regole. Vediamo di seguito come, a seconda delle regole da seguire, cambia "il modo di contare"!

PERMUTAZIONI

Consideriamo le seguenti regole:

• abbiamo a disposizione n lettere, <u>tutte diverse tra loro</u>;

• combiniamo le lettere, ciascuna presa una sola volta per formare parole di n lettere;

• una parola differisce da un'altra per l'ordine in cui le lettere sono disposte.

Immaginiamo di avere a disposizione le lettere A B C D e di dover trovare tutte le possibili combinazioni delle quattro lettere. Posso procedere in questo modo: scelgo una delle quattro da mettere in prima posizione (ho 4 scelte), poi scelgo una delle tre rimanenti per la seconda posizione (tre scelte), poi una delle due rimanenti per la terza posizione (due scelte) ed infine scelgo la rimanente (unica scelta). In totale posso quindi scegliere fra $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ diverse combinazioni. Ognuna di esse è detta **permutazione** dei quattro oggetti di partenza.

Abbiamo usato il fondamentale *principio di moltiplicazione*, utile per risolvere molti problemi di tipo combinatorio.

Se abbiamo n lettere, generalizzando quando ottenuto per le quattro lettere A B C D, otteniamo che tutte le possibili *permutazioni* delle n lettere sono

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

In matematica, il prodotto di n fattori interi decrescenti da n ad 1 si chiama **fattoriale di** n e si indica con il simbolo $n!$ (si legge "n fattoriale")

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

→ osserviamo che nelle permutazioni è importante l'<u>ordine</u> degli elementi (ABCD è diverso da BACD) e <u>non</u> ci sono <u>ripetizioni</u> (tutti gli n oggetti sono distinti) ➔ ***n*-ple ordinate senza ripetizioni**

→ "dal punto di vista delle funzioni": dati A e B insiemi di cardinalità n, le **funzioni biettive** $f: A \to B$ sono $n!$

→ Esempi:

- Dati n oggetti, questi si possono mettere in fila in $n!$ modi diversi
- Quattro squadre partecipano ad un torneo. Le possibili classifiche finali sono $4! = 24$
- L'unica funzione dall'insieme vuoto all'insieme vuoto è biettiva: $0! = 1$

DISPOSIZIONI

Consideriamo le seguenti regole:

• abbiamo a disposizione n lettere, tutte diverse tra loro;

• combiniamo le lettere, ciascuna presa una sola volta per formare parole di k lettere (quindi $k \leq n$, infatti se $k > n$, non si scrive nessuna parola);

• una parola differisce da un'altra per l'ordine in cui le lettere sono disposte e per le lettere che vi compaiono.

Questo tipo di elenchi si dicono **disposizioni** di n elementi di classe k. Anche in questo caso si usa il principio di moltiplicazione: dobbiamo considerare il prodotto di k fattori decrescenti a partire da n, il cui valore quindi è:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Chiamiamo **fattoriale decrescente di** n **fino a** k questo prodotto, lo indicheremo con $(n)_k$.

NB Per $k = n$, le disposizioni non sono altro che permutazioni di n elementi viste al paragrafo precedente; perciò $(n)_n = n!$.

→ come per le permutazioni anche nelle disposizioni è importante l'ordine degli elementi e non ci sono ripetizioni (tutti i k oggetti sono distinti) ➔ **k-ple ordinate senza ripetizioni**

→ "dal punto di vista delle funzioni": dati A insieme di cardinalità k e B insieme di cardinalità n, le **funzioni iniettive** $f: A \to B$ sono $(n)_k$.

→ Esempi:

- In quanti modi un'associazione composta da 9 membri, può nominare un capo, un vice ed un segretario?
  DISPOSIZIONI DI 9 ELEMENTI DI CLASSE 3 , dunque sono $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
- Ho 10 colori. In quanti modi posso colorare le facce di un dado a sei facce se voglio che ognuna abbia un colore diverso?
  DISPOSIZIONI DI 10 ELEMENTI DI CLASSE 6, dunque sono $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$

COMBINAZIONI

Si dispone di n lettere, tutte diverse tra loro

• se ne prendono ogni volta k ($k \leq n$) per formare una parola di k lettere;

• due parole differiscono se hanno almeno una lettera diversa;

• non ha importanza l'ordine con cui sono disposte le lettere;

Sappiamo già che le disposizioni semplici, per gli stessi valori di k, sono date dal fattoriale decrescente $(n)_k$. Fra queste, però, ce ne sono alcune che sono costituite dagli stessi elementi per i quali varia soltanto l'ordine (ad esempio ABCD e ABDC). Queste vanno contate una volta sola dal momento che nelle **combinazioni** non interessa l'ordine. Quante sono?
[Nell'esempio, quante sono le combinazioni che differiscono da ABCD, solo per l'ordine?]
A questa domanda sappiamo già rispondere: si tratta delle permutazioni di k elementi, sono cioè $k!$.

Se in un problema ci interessano le k-ple NON ordinate (combinazioni), dobbiamo pensare il nostro elenco di k-ple ordinate (disposizioni) ripartito in tanti gruppi, in ciascuno dei quali vi sono le k-ple che contengono gli stessi elementi, anche se in ordine diverso (permutazioni).

Abbiamo così tanti gruppi, ciascuno formato da $k!$ k-ple, e ciascun gruppo va contato "come se si trattasse di una sola k-pla".

Allora $\quad numero\ k\text{-}ple\ \ non\ ordinate = \frac{numero\ k\text{-}ple\ ordinate}{k!}$

Cioè $\quad \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

Osserviamo che quest'ultima formula coincide con quella per il calcolo del **coefficiente binomiale di riga** ***n*** **e posizione** ***k*** (si scrive $\binom{n}{k}$ e si legge "*n* su *k*"). Per definizione infatti:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Osserviamo infine che si ha: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

→ nelle combinazioni semplici quindi <u>non</u> importa l'<u>ordine</u> degli elementi e <u>non</u> ci sono <u>ripetizioni</u> (tutti i k oggetti sono distinti) ➔ ***k*-ple non ordinate senza ripetizioni**

→ "dal punto di vista degli insiemi": dato un insieme A di n elementi, i sottoinsiemi di A di cardinalità k sono $\binom{n}{k}$.

→ Esempi:

- Quante commissioni di 5 rappresentanti si possono costituire in un gruppo di 30 persone?
$$\binom{30}{5} = 14256.$$
- In quanti modi un insegnante può scegliere 4 alunni da interrogare in una classe di 25?
$$\binom{25}{4} = 12650.$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI

• fissiamo un alfabeto di n lettere;

• una parola contiene esattamente k lettere, che posso prendere come preferisco (volendo anche ripetendo k volte la stessa lettera), posso utilizzare da 0 a k volte ciascuna lettera;

• il fatto di poter utilizzare più volte uno stesso elemento, consente di avere anche $k>n$;

• occorre tenere in considerazione l'ordine delle k lettere che compongono la parola.

Possiamo usare lo stesso principio usato per le disposizioni semplici, sfruttando cioè il principio di moltiplicazione, ma ragionando sul fatto che ora per le **disposizioni con ripetizione** possiamo ripetere gli elementi. Avrò quindi *n* scelte per la prima lettera, ancora *n* scelte per la seconda, *n* scelte per la terza, e così via fino ad arrivare alla *k*-esima lettera.

Avrò quindi in totale:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\ volte} = n^k$$

→ nelle disposizioni con ripetizioni importa ovviamente l'ordine dei *k* elementi, ma questa volta all'interno della *k*-pla posso avere elementi che si ripetono ➔ ***k*-ple ordinate**

→ "dal punto di vista delle funzioni": dato A insieme di cardinaità *k* e B insieme di cardinalità *n*, le funzioni $f: A \rightarrow B$ sono n^k.

→ Esempi:

- In quanti modi posso colorare le 6 facce di un dado con 8 colori differenti (senza regole)?

$$8^6$$

- Se si lanciano 10 monete non truccate (=se lancio 10 volte una moneta non truccata), quanti sono gli esiti possibili?

$$2^{10}$$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONI ASSEGNATE

• abbiamo a disposizione *n* lettere con alcune ripetute più volte;

• combiniamo le lettere per formare parole di *n* lettere;

• una parola differisce da un'altra per l'ordine in cui le lettere sono disposte.

Immaginiamo di avere a disposizione le lettere M M M A e di dover trovare tutte le possibili permutazioni delle quattro lettere. Non posso effettuare lo stesso calcolo del caso delle permutazioni semplici poiché in questo caso otterrei tre volte la stessa parola: MMMA

La formula che determina il numero di permutazioni di *n* elementi uno ripetuto k_1 volte, un'altro k_2 volte, l'ultimo k_r volte, dove $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$, è:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_r!}$$

In matematica indichiamo con $\binom{n}{k_1, \cdots, k_r}$ tale espressione che è detta **coefficiente multinomiale** e rappresenta un'estensione del coefficiente binomiale, con *n* intero non negativo e $k_1, \cdots, k_r$ interi positivi tali che $k_1 + \cdots + k_r = n$.

(Nell'esempio ho 4 elementi, la M ripetuta 3 volte e la A una volta, cioè $k_1 = 3$ e $k_2 = 1$; quindi il numero di permutazioni è $\frac{4!}{3!1!} = 4$)

→ nelle permutazioni è importante l'ordine degli elementi e ho ripetizioni assegnate ➔ **n-ple ordinate da n elementi con ripetizioni assegnate $\boldsymbol{k_1, \cdots, k_r}$ con $\boldsymbol{n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r}$**

→ Trovare tutti i possibili anagrammi della parola BARABBA

La lettera B è ripetuta 3 volte: $k_1 = 3$

La lettera A è ripetuta 3 volte: $k_2 = 3$

La lettera R è ripetuta una volta: $k_3 = 1$

Gli anagrammi sono $\frac{7!}{3!3!1!}$ = 140.

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONI

Si dispone di *n* lettere con ripetizioni

• se ne prendono ogni volta *k* per formare una parola di *k* lettere (può essere *k* ≥*n*)

• due parole differiscono se hanno almeno una lettera diversa;

• non ha importanza l'ordine con cui sono disposte le lettere;

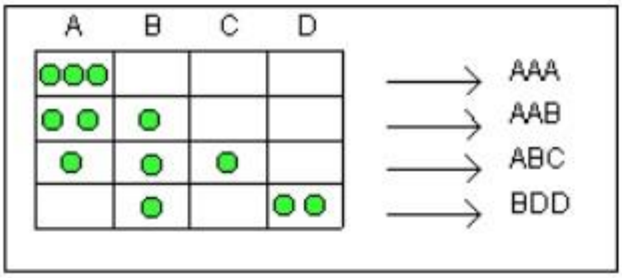
Anche tra disposizioni e combinazioni con ripetizione permane la stessa differenza già vista per quelle semplici. Le parole AABBB e BABAB, formate da due A e tre B, in ordine differente sono considerate due diverse disposizioni, mentre le stesse costituiscono una sola combinazione. Abbiamo visto come passare dalle disposizioni semplici alle combinazioni semplici eliminando tutte le disposizioni costituite dallo stesso insieme di elementi, scritti in ordine differente.
Nel caso delle disposizioni e combinazioni con ripetizione, la situazione si complica un po'. La ripetizione, non prefissata, degli stessi elementi fa variare il numero delle ripetizioni stesse.

Sono infatti disposizioni diverse AABBC e AABBB. La prima dà luogo, permutando i vari elementi, a 30 diverse parole, che corrispondono ad una stessa combinazione. La seconda ne produce, invece, solo 10. Il procedimento utilizzato per il caso delle "semplici" ci porterebbe a dividere ogni volta per un valore variabile (il primo gruppo per 30 ed il secondo per 10). Questo potrebbe essere fatto nei casi più semplici ma diventerebbe troppo laborioso con un numero di elementi un po' più numeroso. Occorre quindi trovare un procedimento diverso per ottenere il risultato.

Per farlo andiamo a determinare una corrispondenza fra le combinazioni con ripetizione e le permutazioni con un certo tipo di ripetizione assegnata.

Usiamo un modello frequente in combinatoria, quello delle biglie e delle scatole. Una combinazione è indicata da un numero *n* di scatole, contraddistinte ciascuna da una lettera. Si prendono *k* biglie e si dispongono nelle *n* scatole; trattandosi di combinazioni con ripetizione, una scatola potrà contenere da 0 a *k* biglie. La biglia indicherà quale scatola sarà considerata di volta in volta.

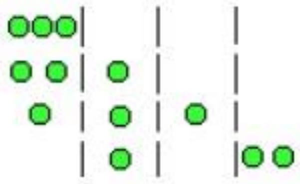
Per chiarire meglio la situazione vediamo alcuni esempi nel disegno qui sotto.



Quindi ogni riga rappresenta una combinazione con ripetizione di 4 elementi (4 scatole) di classe 3 (3 biglie), rappresentate dalle terne a destra della scatola.

(o anche combinazioni con ripetizioni di parole di 3 lettere da un alfabeto di 4)

Consideriamo la situazione appena descritta da un altro punto di vista.



Togliendo la cornice esterna e le pareti divisorie orizzontali dal disegno precedente, rimane una successione di biglie e di pareti divisorie verticali che dividevano una scatola dall'altra.
Nell'immagine a lato, su ogni riga, sono presenti tre biglie e tre pareti divisorie. Le varie combinazioni si ottengono permutando in vari modi le tre biglie e le tre pareti divisorie (barrette).
Ciò corrisponde a trovare tutti gli anagrammi della parola AAABBB, in cui la A rappresenta le biglie e la B le barrette.

A questo punto allora non è difficile vedere la corrispondenza tra le combinazioni con ripetizione di tre lettere, prese da un alfabeto di 4 lettere, e le permutazioni di 6 elementi (biglie + barrette, $4+3-1$), il primo (biglie) ripetuto 3 volte ($=k$) e il secondo (barrette) ripetuto $(4-1)$ volte ($=n-1$).

Generalizzando, se si hanno n scatole e k biglie, le combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k, corrisponderanno alle permutazioni di $n+k-1$ elementi il primo ripetuto k volte ed il secondo $(n-1)$ volte. Da quanto fatto per le permutazioni con ripetizione, avremo quindi la seguente formula, che per quanto appena detto rappresenta il numero di combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k:

$$\frac{n+k-1!}{k_1!\cdot k_2!}=\frac{n+k-1!}{k!\,(n-1)!}=\frac{(n+k-1)\cdot\ldots\cdot n}{k!}=\binom{n+k-1}{k}$$

→ Esempio:

In quanti modi diversi posso distribuire 12 penne in 5 cassetti? (ogni cassetto può contenere da 0 a 12 penne e le 12 penne possono essere considerate indistinguibili).

$n=5$ e $k=12$

$\Rightarrow \binom{5+12-1}{12}=1820$

- **PRINCIPIO INCLUSIONE/ESCLUSIONE**

NB Dato un insieme A, indichiamo con $\#(A)$ la sua **cardinalità**, ovvero il numero di elementi che contiene.

Consideriamo n insiemi finiti $A_1, A_2, \dots, A_n$. Allora:

$$\#(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1\le i\le n} \#(A_i) - \sum_{1\le i\le j\le n} \#(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{1\le i\le j\le k\le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1}\#(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Per n=2

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#(A_1) + \#(A_2) - \#(A_1 \cap A_2)$$

Per n=3

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3) -$$

$$-\#(A_1 \cap A_2) - \#(A_3 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

- **SOTTOINSIEMI**

L'**insieme delle parti $\mathcal{P}$(A)** di un insieme A è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A. La sua cardinalità è data da

$$|\mathcal{P}(\mathrm{A})| = 2^a \quad \text{dove } |A| = a$$

Piano Lauree Scientifiche – Genova
La Matematica in Gara

$\underline{n} := \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$ $\quad \#(\underline{n}) = n$ $\quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ $\quad \binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad \left\{ {n \atop k} \right\} := \dfrac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} i^n \binom{k}{i}$

funzioni da $\underline{k}$ a $\underline{n}$	k-ple ordinate da n elementi	disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k	n^k
funzioni iniettive da $\underline{k}$ a $\underline{n}$	k-ple ordinate da n elementi senza ripetizioni	disposizioni (semplici) di n elementi di classe k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
funzioni biiettive da $\underline{n}$ a $\underline{n}$	n-ple ordinate da n elementi senza ripetizioni	permutazioni (semplici) di n elementi	$n!$
sottoinsiemi di k elementi in $\underline{n}$	k-ple non-ordinate da n elementi senza ripetizioni	combinazioni (semplici) di n elementi di classe k	$\binom{n}{k}$
sottoinsiemi di $\underline{n}$	-ple non-ordinate da n elementi senza ripetizioni	combinazioni (semplici) di n elementi di classe qualunque	2^n
anagrammi di k_1 copie del segno s_1,..., k_ℓ copie del segno s_ℓ, con $s_i \neq s_j$ per $i \neq j$	n-ple ordinate da n elementi con ripetizioni assegnate $k_1,\ldots,k_\ell$ con $k_1 + \ldots + k_\ell = n$	permutazioni di n elementi con ripetizioni di classe $k_1,\ldots,k_\ell$	$\dfrac{(k_1 + \ldots + k_\ell)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!}$
multiinsiemi di k elementi in $\underline{n}$	k-ple non-ordinate da n elementi con molteplicità	combinazioni con ripetizioni di n elementi di classe k	$\binom{n+k-1}{k}$
partizioni di $\underline{n}$ in k blocchi		suddivisioni (semplici) di n elementi di classe k	$\left\{ {n \atop k} \right\}$
suriezioni da $\underline{n}$ a $\underline{k}$		suddivisioni ordinate (semplici) di n elementi di classe k	$k!\left\{ {n \atop k} \right\}$

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \le h \le n} \#(A_h) - \sum_{1 \le h < i \le n} \#(A_h \cap A_i) + \sum_{1 \le h < i < j \le n} \#(A_h \cap A_i \cap A_j) -$$
$$- \sum_{1 \le h < i < j < k \le n} \#(A_h \cap A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$\#(A_1 \cup A_2) = [\#(A_1) + \#(A_2)] - \#(A_1 \cap A_2)$$

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = [\#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3)] - [\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3)] + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$