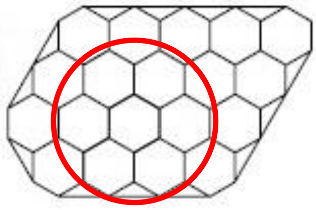
1) Un pavimento è piastrellato come in figura. In quanti modi è possibile colorare le mattonelle esagonali di blu, rosso e nero in modo che due mattonelle esagonali con un lato in comune non abbiano mai lo stesso colore?
(A) nessuno **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** infiniti



Considero la parte di figura più generica rappresentata dal "fiore a sei petali". Scelto il colore del centro, mi rimangono solo due colori da utilizzare per i petali. Per essi avrò quindi due diverse colorazioni. Ho quindi 3 scelte per il centro e successivamente 2 scelte per i "petali", per il principio di moltiplicazione ho quindi $3 \cdot 2 = 6$ scelte. La risposta corretta è quindi la D.

2) Carlo ha sei mele e sei pere: in quanti modi può mettere in fila 6 frutti, in modo tale che tra due mele non ci sia mai nessuna pera?
(A) 16 **(B)** 22 **(C)** 32 **(D)** 35 **(E)** 39

Scriviamo innanzitutto le ipotesi.

Alfabeto: 6 mele, 6 pere (6M, 6P)

Parole di 6 lettere ($k = 6$)

Regole: Tra due M non ci devono essere P (quindi le M sono da considerarsi come un unico elemento unito che non si può spezzare)

Distinguiamo i casi a seconda del numero di di M presenti:

1) 6 M Ho un'unica possibilità MMMMMM 1 scelta

2) 5 M + 1 P PMMMMM oppure MMMMMP 2 scelte

3) 4 M + 2 P PPMMMM Devo contare in quanti modi posso sistemare i 6 oggetti ricordando la regola delle mele. Ciò equivale a contare il numero di permutazioni di tre oggetti con il primo ripetuto due volte, infatti ho i tre oggetti P, P, MMMM dove il primo, la P, è ripetuto due volte. Dunque: $\frac{3!}{2!1!} = 3$ scelte

4) 3 M + 3 P PPPMMM Come prima, devo contare il numero di permutazioni di 4 oggetti (P, P, P, MMM) il primo ripetuto 3 volte, quindi: $\frac{4!}{3!1!} = 4$ scelte

5) 2 M + 4 P PPPPMM $\frac{5!}{4!1!} = 5$ scelte

6) 1 M + 5 P PPPPPM $\frac{6!}{5!1!} = 6$ scelte

7) 6 P PPPPPP 1 scelta

Quindi intotale avrò $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 1 = 22$ scelte. Quindi la risposta corretta è la B.

3) Quanti sono i numeri di tre cifre, tutte diverse da 0, tali che comunque si permutino le loro cifre il numero che si ottiene è divisibile per quattro?
(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 16 **(D)** 24 **(E)** 48

Osserviamo innanzitutto che l'alfabeto in questo caso è dato da tutte le cifre dall'1 al 9, le parole che devo formare sono costituite da 3 lettere e che c'è una regola da seguire: tutte le permutazioni delle parole che considero devono essere dei numeri divisibili per 4.

Divisibilità per 4: le ultime due cifre da destra devono essere un multiplo di 4.

Chiamiamo *abc* le tre cifre. Osserviamo che le tre cifre dovranno essere tutte pari in quanto un nunero per essere divisibile per 4 deve essere almeno pari e quindi c è pari, ma poiché la stessa regola deve valere per tutte le permutazioni di *abc* allora anche a e b saranno pari.

Osserviamo però che se $c = 2$ allora necessariamente $b = 1$ oppure $b = 3$, cosa che è in contraddizione con quanto appena detto. Anche se $c = 6$ allora $b = 1$ oppure $b = 3$.

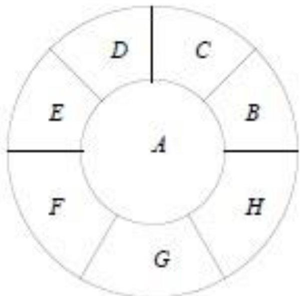
In definitiva abbiamo che a, b, c possono essere 4 oppure 8. Basta quindi ora contare le disposizioni con ripetizione di 2 elementi (4 e 8) in classe 3, che sono pari a $2^3 = 8$. La risposta corretta è quindi la A.

4) Il piccolo Giangauss legge sul suo libro di Latino "$XV = 15$"; allora si chiede: "Quante sono le coppie ordinate distinte (X, V) di numeri interi (eventualmente negativi), il cui prodotto è uguale a 15?" ($(2, -1)$ e $(-1, 2)$ sono, ad esempio, due coppie ordinate distinte di numeri interi). Qual è la risposta corretta?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 6, **(E)** 8.

Innanzitutto consideriamo i divisori di 15, $Div(15) = \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$

Le coppie che soddisfano le ipotesi sono quindi $(-15, -1), (-5, -3), (5,3), (15,1)$. Poiché è richiesto di contare le coppie ordinate, allora devo contare ogni coppie due volte in quanto considero anche le coppie simmetriche. Dunque avrò in totale 8 coppie. Quindi la risposta corretta è la E.

5) Concetta immagina un mondo piatto e tondo, e lo divide in otto stati, uno centrale e sette intorno a questo, come indicato nella figura a fianco. Inoltre a ciascuno stato assegna come nome una lettera (vedi figura). Vuole colorare ciascuno stato di rosso, oppure di verde, oppure di giallo, in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore. In quanti modi diversi può farlo?
(A) Nessuno, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** 6.



Indichiamo i colori con R, V e G. Se decido il colore dello stato centrale non potrò più utilizzare lo stesso colore, in quanto tutti gli altri stati confinano con A. Ho quindi due colori da utilizzare per gli stati rimanenti, quindi necessariamente la colorazione dovrà essere alternata; ma se scelgo il colore di uno, ad esempio di B, e coloro in modo alternato gli stati, ad esempio in senso orario, poiché il numero di stati attorno ad A è dispari, avrò che B avrà necessariamente lo stesso colore di B. Questo accade sempre a prescindere dal colore usato per il centro. Non posso dunque procedere il nessun modo rispettando le ipotesi. La risposta corretta è quindi la A.

6) Valeria deve scegliere la combinazione della sua cassaforte, che deve essere un numero di cinque cifre, tutte diverse da zero, divisibile per tre, e tale che delle prime quattro cifre (da sinistra) due siano pari e due dispari. Quante possibilità ha?
(A) $2^5 \cdot 5^2$, (B) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2$, (C) $2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^2$, (D) $5^2 \cdot 3^4$, (E) $2^{10} \cdot 5 \cdot 3$.

Scriviamo con cura le ipotesi:

- alfabeto di 9 elementi, ovvero le cifre dall'1 al 9

- parole di 5 lettere _ _ _ _ _

- regole da seguire: divisibilità per 3

le prime quattro cifre devono essere due pari (2 p) e due dispari (2 d)

Contiamo allora tutte le possibilità che abbiamo per ogni regola

- Divisibilità per 3 →la somma delle cifre deve essere un multiplo di tre

Supponiamo di aver sceltole prime quattro cifre, la cui somma la indichiamo con *S* e dobbiamo ancora scegliere l'ultima cifra che indico con q. Allora:

- *S* è divisibile per 3; necessariamente allora anche q è divisibile per 3, quindi $q = 3,6,9$

- *S* non è divisibile per 3; allora ho due casi: *S* da resto 1 nella divisione per 3 o da resto 2.

Nel primo caso allora, affinchè la somma $S + q$ sia divisibile per 3, $q = 2,5,8$

Nel secondo caso $q = 1,4,7$

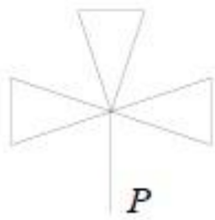
Allora per ogni valore di *S* abbiamo comunque <u>3 scelte</u> per *q*.

- Le prime 4 cifre devono essere p p d d. Si tratta quindi di determinare il numero di permutazioni di 4 elementi, uno ripetuto 2 volte e l'altro anche ripetuto 2 volte, cioè $\frac{4!}{2!2!} = 6$ scelte.

- Infine dobbiamo contare quante scelte ho effettivamente per le prime quattro cifre. Osserviamo che p può valere 2, 4, 6, 8 e considerando che devo scegliere due valori e che sono ammesse le ripetizioni allora per i due numeri pari avrò 4^2 possibilità. Invece d può valere 1, 3, 5, 7, 9 e avrò quindi 5^2 possibilità.

Allora per il principio di moltiplicazione conto tutte le scelte che posso effettuare che quindi saranno: $3 \cdot 6 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ scelte. La risposta corretta è quindi la B.

7) In quanti modi distinti posso disegnare la figura a fianco partendo da P, senza mai staccare la penna dal foglio e senza passare più di una volta da nessun punto eccettuato il vertice comune ai tre triangoli?
(A) $2^4\,3$, **(B)** $2^3\,3$, **(C)** 2^4, **(D)** $2^2\,3^3$, **(E)** 3^3.



Utilizziamo il principio di moltiplicazione. Partiamo da P, arrivati al punto centrale abbiamo 6 possibili scelte; una volta scelta e percorsa la strada "di un petalo" ritorniamo al centro dove possiamo scegliere fra 4 diverse strade; di nuovo tornando al centro scegliamo poi fra le ultime due strade possibili. Ho quindi in totale $6 \cdot 4 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3$ scelte. La risposta corretta è quindi la A.

8) Carla si è dimenticata la password di accensione del suo nuovissimo computer! Si ricorda però che è una sequenza di 4 vocali, non necessariamente distinte, di cui due sono maiuscole e due sono minuscole. Quante password diverse deve provare Carla, al massimo, per accendere il computer?
(A) $3 \cdot 5^4$, **(B)** 5^5, **(C)** $6 \cdot 5^4$, **(D)** 5^6, **(E)** $3 \cdot 5^6$.

- 4 vocali non necessariamente disteinte → disposizioni con ripetizioni di 5 elementi di classe 4, quindi 5^4
- due maiusole (M) e due minuscole (m) → permutazioni di 4 elementi con ripetizione assegnata $\frac{4!}{2!2!} = 6$

Quindi in totale per il principio di moltiplicazione $5^4 \cdot 6$. Quindi la risposta corretta è la C.

9) Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre in cui compare una e una sola volta la cifra 5 ed essa è la cifra più grande presente nel numero?
(A) 225, (B) 400, (C) 425, (D) 525, (E) 600.

Distinguiamo 4 casi diversi a seconda della posizione del 5

1) Il 5 in prima posizione → posso scegliere fra 0, 1, 2, 3, 4 da sistemare nelle tre posizioni e con la possibilità di ripetere più volte le cifre → disposizioni con ripetizioni di 5 elementi di classe 3: 5^3

2) Il 5 in seconda posizione → bisogna fare attenzione al fatto che in prima posizione posso scegliere fra 1, 2, 3, 4 (non posso mettere lo 0) e ho quindi 4 scelte; per la terza e la quarta posizione ho invece 5^2; quindi in totale $5^2 \cdot 4 = 100$ scelte

3) Il 5 in terza posizione. Valgono le stesse considerazioni del punto precedente → 100 scelte

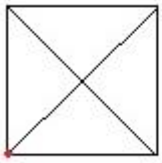
4) Il 5 in quarta posizione. Valgono le stesse considerazioni del punto precedente → 100 scelte

Dunque in totale avrò $125 + 100 + 100 + 100 = 425$. Quindi la risposta corretta è la C.

10) La Polisportiva "I tropici" ha organizzato un torneo di calcio a cui partecipano 3 squadre ciascuna composta da 15 giocatori (riserve comprese) con maglie numerate da 1 a 15. La notte prima delle partite ha nevicato e per poter giocare è necessario spalare la neve dal campo. Viene deciso allora di nominare un gruppo di 3 spalatori scegliendo un giocatore per squadra in modo che non ci siano due giocatori con lo stesso numero di maglia. In quanti modi diversi può essere formato il gruppo degli spalatori?
(A) 48, (B) 455, (C) 1125, (D) 2730, (E) 3375.

Si tratta di determinare il numero di disposiziioni semplici di 15 elementi di classe 3, quindi $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$. (Equivalentemente per il principiodi moltiplicazione, ho 15 scelte per il primo, 14 per il secodo e 13 per il terzo). La risposta corretta è dunque la D.

11) Quanti sono i percorsi distinti che, partendo da un vertice fissato d
movendosi solo lungo i suoi lati e le sue diagonali, passano per ogı
una sola volta?
(A) Due, (B) tre, (C) quattro, (D) sei, (E) otto.



Immaginiamo di partire dal vertice assegnato indicato in rosso.

Posso da qui scegliere fra 3 strade; in goni caso fatta la prima scelta avrò poi

la possibilità di scegliere 2 strade ed infine mi rimarrà un'unica scelta.

Quindi $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ scelte. Quindi la risposta corretta è la D.

12) Il professor Victor tiene un corso a 10 studenti e all'inizio di ogni lezione compila il foglio del presenze scrivendo "presente" oppure "assente" a fianco del nome di ciascuno studente. Quanti sono i possibili fogli delle presenze distinti?
(A) 10^2, (B) $2^2 + 2^3 + 2^4$, (C) 10^3, (D) 2^{10}, (E) 10^4.

Si tratta di calcolare le disposizioni con ripetizioni di 2 elementi in classe 10. Quindi ho 2^{10}