

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

-
- 1 Quante cifre 1 si usano per scrivere il numero 75 in notazione binaria?
 - 2 Quante cifre 0 si usano per scrivere il numero $\frac{1}{3}$ in notazione binaria?
 - 3 Qual è la somma dei primi 150 numeri interi positivi esclusi i multipli di 11 e i multipli di 13?
 - 4 Qual è il più grande numero di 4 cifre che si scrive usando somme e differenze dei due soli numeri 34 e 21?
 - 5 Le 48 tende di un accampamento militare di forma rettangolare sono sistemate molto ben ordinate in modo che siano tutte separate tra loro da nove vialetti che vanno da nord a sud e da sette vialetti che vanno da est a ovest. Le guardie devono attraversare l'accampamento per controllare, partendo da un vertice del rettangolo e arrivando al vertice opposto. Di notte fanno sempre il percorso più breve. Quanti sono i percorsi possibili dal vertice a sud-ovest al vertice a nord-est?
 - 6 Usando tre A, tre R, due E e una S, quante parole diverse (anche senza senso) si possono scrivere?
 - 7 Anthony deve raccogliere sette palline colorate in sette colori diversi in tre scatole: una rossa, una nera, una bianca. Quanti sono i modi di distribuire le sette palline nelle tre scatole?
 - 8 Un'impresa di costruzioni ferroviarie costruisce una linea ferroviaria della lunghezza di 4710 metri. Può posare solo binari della lunghezza di 17 metri e binari della lunghezza di 19 metri. Il compenso ricevuto è pari a 10000 Euro per ogni binario posato. Quanti binari da 17 metri deve posare l'impresa per massimizzare il proprio profitto?
 - 9 Determinare i numeri che si possono ottenere come massimo comun divisore di $10 + n$ e $20 + n$ dove n è un intero e maggiore di 0. Rispondere con il prodotto di tali numeri.
 - 10 Per far parte del Club dei Bugiardi Onesti si deve avere una caratteristica cruciale: dire sempre la verità (cioè, come si definiscono i membri del club, essere "sincero") oppure dire sempre il contrario della verità (cioè essere "bugiardo"). Una volta alla settimana i membri del club pranzano insieme seduti ad una tavola rotonda. Oggi, appena seduti, hanno detti tutti la stessa frase: «Quelli seduti a fianco a me sono uno sincero e l'altro bugiardo.» I sinceri sono 76, quanti sono i bugiardi?
 - 11 Nel paese di Arbulaz, una statistica ha ottenuto un risultato sorprendente: ogni anno, di mille studenti che si laureano, 50 sono matematici. Ai bambini dell'asilo viene fatto un test per verificare la loro attitudine alla matematica. La percentuale di falsi positivi (futuri non matematici che risultano positivi al test) è del 10%, mentre la percentuale di falsi negativi (futuri matematici che risultano negativi al test) è del 30%. Sapendo che il piccolo Francesco è positivo al test, sia p la probabilità che, quando si laurea, sia un matematico. Quanto vale p ?
 - 12 Nel 1970 i Beatles vennero a Genova in incognito e pernottarono all'albergo *Nicolas Bourbaki* (ora distrutto per costruire il dipartimento di matematica). L'albergo aveva 10 camere di lusso disposte dallo stesso lato di un corridoio rettilineo dell'ultimo piano. A ciascuno dei cantanti venne assegnata a caso una camera: qual è la probabilità che avessero quattro camere contigue?
 - 13 Nell'armadio di George ci sono 5 completi (pantaloni, giacca e camicia). Sua moglie ha numerato ciascun completo (da uno a cinque) in modo che George non mischi tra di loro i completi. Purtroppo, George ha bevuto un po' troppo e sceglie a caso una camicia, un paio di pantaloni ed una giacca. Qual è la probabilità che la somma dei numeri sui tre indumenti sia 9?

Soluzioni

1 Quante cifre 1 si usano per scrivere il numero 75 in notazione binaria?

Si scrivono i resti delle divisioni ripetute di 75:

$$\begin{array}{r|cccccccc} n & 75 & 37 & 18 & 9 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ \hline [n]_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Perciò $75 = 1001011$

2 Quante cifre 0 si usano per scrivere il numero $\frac{1}{3}$ in notazione binaria?

$$\frac{1}{3} = 1 : 11 = 0,010\dots = 0,0\overline{1}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \end{array}$$

3 Qual è la somma dei primi 150 numeri interi positivi esclusi i multipli di 11 e i multipli di 13?

Per calcolare la somma richiesta, conviene

- sommare i primi 150 numeri

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\dots+75 \\ 150+149+148+\dots+76 \end{array} + = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 151 = 11325$$

- togliere la somma dei multipli di 11 e la somma dei multipli di 13

$$11 + 22 + \dots + 143 = 11 \cdot (1 + 2 + \dots + 13) = 11 \cdot \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 1001$$

$$13 + 26 + \dots + 143 = 13 \cdot (1 + 2 + \dots + 11) = 13 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 = 858$$

- aggiungere la somma dei multipli comuni di 11 e 13 (143), perchè sono stati cancellati due volte

In totale,

$$11325 - 1001 - 858 + 143 = 9609.$$

4 Qual è il più grande numero di 4 cifre che si scrive usando somme e differenze dei due soli numeri 34 e 21?

Il massimo comun divisore tra 34 e 21 è 1, perciò il massimo numero di quattro cifre che si può scrivere è 9999.

5 Le 48 tende di un accampamento militare di forma rettangolare sono sistemate molto ben ordinate in modo che siano tutte separate tra loro da nove vialetti che vanno da nord a sud e da sette vialetti che vanno da est a ovest. Le guardie devono attraversare l'accampamento per controllare, partendo da un vertice del rettangolo e arrivando al vertice opposto. Di notte fanno sempre il percorso più breve. Quanti sono i percorsi possibili dal vertice a sud-ovest al vertice a nord-est?

Il percorso più breve passa per $(9 - 1) + (7 - 1) = 14$ incroci dove stabilire se andare a nord o a est: in sei di questi è necessario andare a est. I percorsi possibili corrispondono ai modi per scegliere sei elementi in un insieme di 14 elementi: $\binom{14}{6} = 3003$.

6 Usando tre A, tre R, due E e una S, quante parole diverse (anche senza senso) si possono scrivere?

Se le copie della stessa lettera fossero colorate in modi diversi e, con questi colori, si distinguessero parole che differiscono solo per il colore delle lettere, le parole possibili sarebbero 11!. Le parole che differiscono solo per i colori della lettera A sono 3!, quelle che differiscono solo per i colori della lettera R sono 5!, e quelle che differiscono soltanto per i colori della lettera E sono 2!. Perciò le parole diverse che si possono scrivere con le lettere date sono $\frac{11!}{3!5!2!} = 27720$.

7 Anthony deve raccogliere sette palline colorate in sette colori diversi in tre scatole: una rossa, una nera, una bianca. Quanti sono i modi di distribuire le sette palline nelle tre scatole?

Distribuire le sette palline significa associare ad ogni pallina il colore di una delle tre scatole, cioè costruire una funzione da un insieme di sette elementi ad un insieme di tre elementi. Le possibilità sono $3^7 = 2187$.

8 Un'impresa di costruzioni ferroviarie costruisce una linea ferroviaria della lunghezza di 4710 metri. Può posare solo binari della lunghezza di 17 metri e binari della lunghezza di 19 metri. Il compenso ricevuto è pari a €10000 per ogni binario posato. Quanti binari da 17 metri deve posare l'impresa per massimizzare il proprio profitto?

Dato che l'equazione $17x + 19y = 4710$ ammette soluzione se e solo se il massimo comun divisore $17 \square 19$ di 17 e 19 divide 4710, siamo certi che esistono soluzioni poiché $17 \square 19 = 1$. Per determinarle, è necessario innanzi tutto utilizzare l'algoritmo euclideo come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} 19 = 1 \cdot 17 + 2 \\ 17 = 8 \cdot 2 + 1 \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} = 17 - 8(19 - 17) = 9 \cdot 17 - 8 \cdot 19 \\ 1 = 17 - 8 \cdot 2 \end{array} \right. \uparrow$$

cioè $1 = 9 \cdot 17 - 8 \cdot 19$. Una soluzione dell'equazione $17x + 19y = 4710$ è così

$$\begin{cases} x_0 = 4710 \cdot 9 \\ y_0 = -4710 \cdot 8 \end{cases}$$

dato che

$$17x_0 + 19y_0 = 17 \cdot (4710 \cdot 9) - 19 \cdot (4710 \cdot 8) = 4710 \cdot (9 \cdot 17 - 8 \cdot 19) = 4710 \cdot 1 = 4710.$$

Ogni altra soluzione $17a + 19b = 4710$ è tale che $17(a - x_0) + 19(b - y_0) = 0$, cioè 17 divide $(b - y_0)$ e 19 divide $(a - x_0)$. Dunque $b - y_0 = 17k$ e $a - x_0 = 19k'$ e $17 \cdot 19k' + 19 \cdot 17k = 17(a - x_0) + 19(b - y_0) = 0$. Perciò $k' = -k$ e

$$\begin{cases} a = x_0 - 19k \\ b = y_0 + 17k \end{cases}$$

dove k è un intero opportuno. Se imponiamo che a e b siano maggiori di o uguali a 0 abbiamo che

$$\frac{4710 \cdot 8}{17} \leq k \leq \frac{4710 \cdot 9}{19}$$

cioè $2216.47 < k < 2231.05$. Per ottenere il valore massimo possibile di a scegliamo il valore di k più piccolo: $k = 2217$. Per tale valore otteniamo $a = 267$.

9 Determinare i numeri che si possono ottenere come massimo comun divisore di $10 + n$ e $20 + n$ dove n è un intero e maggiore di 0. Rispondere con il prodotto di tali numeri.

Grazie alle proprietà del massimo comun divisore, $(20 + n) \square (10 + n) = 10 \square (10 + n) = 10 \square n$. I numeri cercati sono esattamente i divisori di 10; il loro prodotto è $1 \times 2 \times 5 \times 10 = 100$.

10 Per far parte del Club dei Bugiardi Onesti si deve avere una caratteristica cruciale: dire sempre la verità (cioè, come si definiscono i membri del club, essere "sincero") oppure dire sempre il contrario della verità (cioè essere "bugiardo"). Una volta alla settimana i membri del club pranzano insieme seduti ad una tavola rotonda. Oggi, appena seduti, hanno detti tutti la stessa frase: «Quelli seduti a fianco a me sono uno sincero e l'altro bugiardo.» I sinceri sono 76, quanti sono i bugiardi?

Ogni sincero deve avere a fianco un sincero e un bugiardo. Del resto, un bugiardo a fianco di un sincero deve avere un altro sincero a fianco. Perciò ogni bugiardo ha a fianco due sinceri. I bugiardi sono la metà dei sinceri: 38.

11 Nel paese di Arbulaz, una statistica ha ottenuto un risultato sorprendente: ogni anno, di mille studenti che si laureano, 50 sono matematici. Ai bambini dell'asilo viene fatto un test per verificare la loro attitudine alla matematica. La percentuale di falsi positivi (futuri non matematici che risultano positivi al test) è del 10%, mentre la percentuale di falsi negativi (futuri matematici che risultano negativi al test) è del 30%. Sapendo che il piccolo Francesco è positivo al test, sia p la probabilità che, quando si laurea, sia un matematico. Quanto vale p ?

Su 1000 bambini, 50 diventeranno matematici mentre gli altri 950 non lo saranno. Del primo gruppo risultano positivi al test $50 \times 0.7 = 35$, mentre del secondo gruppo $950 \times 0.1 = 95$. Il numero totale di bambini positivi al test è quindi $35 + 95 = 130$, per cui $p = \frac{35}{130}$ da cui $p = 0.2692307$.

12 Nel 1970 i Beatles vennero a Genova in incognito e pernottarono all'albergo Nicolas Bourbaki (ora distrutto per costruire il dipartimento di matematica). L'albergo aveva 10 camere di lusso disposte dallo stesso lato di un corridoio rettilineo dell'ultimo piano. A ciascuno dei cantanti venne assegnata a caso una camera: qual è la probabilità che avessero quattro camere contigue?

Il numero di modi di occupare 4 camere su 10 è

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210,$$

il numero di modi in cui si possono occupare 4 camere in modo consecutivo è 7, da cui la probabilità richiesta è $\frac{1}{30} = 0.0\overline{3}$.

13 Nell'armadio di George ci sono 5 completi (pantaloni, giacca e camicia). Sua moglie ha numerato ciascun completo (da uno a cinque) in modo che George non mischi tra di loro i completi. Purtroppo, George ha bevuto un po' troppo e sceglie a caso una camicia, un paio di pantaloni ed una giacca. Qual è la probabilità che la somma dei numeri sui tre indumenti sia 9?

Il numero di modi per scegliere un completo è $5^3 = 125$. Il numero di modi per cui la somma è nove è 19 poiché

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 2 = 6 \quad (1 + 3 + 5) \\ \quad \quad 3 \quad (1 + 4 + 4) \\ \quad \quad 3 \quad (2 + 2 + 5) \\ 3 \cdot 2 = 6 \quad (2 + 3 + 4) \\ \quad \quad 1 \quad (3 + 3 + 3) \end{array}$$

La probabilità è $\frac{19}{125} = 0.152$.