La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Galileo 2013

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

---

1. Quanti sono i numeri primi p tali che p divide $2^p + 1$?

2. Determinare quanti sono gli interi $n \geq 0$ tali che $n^4 + 4$ è un numero primo.

3. Sia n il più piccolo intero ≥ 2013 che si può scrivere sia come somma di 5 interi consecutivi, sia come somma di 6 interi consecutivi, sia come somma di 7 interi consecutivi. Quanto vale n?

4. Quante sono le coppie (x, y) di numeri interi che soddisfano l'equazione

$$x^3 + 17^3 = y^3?$$

5. Quanti sono i numeri interi s con $2013 \leq s \leq 10001$ tali che la congruenza

$$x^s + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

ha soluzione?

6. Determinare il massimo comun divisore di tutti i numeri della forma

$$n^7 + n^6 - n^5 - n^4$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Cenni di soluzioni

1. Supponiamo che p sia un numero primo che divide 2^p+1. Il Piccolo Teorema di Fermat assicura che

$$2^p+1 \equiv 2+1 \pmod{p},$$

quindi p divide 3, ossia $p=3$. È poi immediato verificare che $p=3$ soddisfa la richiesta del problema, quindi 3 è l'unico numero primo con la proprietà desiderata. La risposta è `0001`.

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $f(n) := n^4+4$. Allora $f(0)=4$ non è primo e $f(1)=5$ è primo. D'altra parte, possiamo scrivere

$$n^4+4 = n^4+4+4n^2-4n^2 = (n^2+2)^2-(2n)^2 = (n^2+2n+2)\cdot(n^2-2n+2), \tag{1}$$

e se $n>1$ allora $n^2+2n+2>1$ e $n^2-2n+2>1$. Pertanto la (1) implica che se $n>1$ allora n^4+4 non è primo. La risposta è `0001`.

3. Cinque interi consecutivi possono essere scritti nella forma $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ e la loro somma è $5x$. Viceversa, se $n=5x$ allora n è la somma dei cinque interi consecutivi $x-2, x-1, x, x+1, x+2$. Analogamente, un intero n è la somma di 7 interi consecutivi se e solo se n è multiplo di 7. Infine, sei interi consecutivi possono essere scritti nella forma $y-2, y-1, y, y+1, y+2, y+3$ e la loro somma è $6y+3$; viceversa, ogni numero della forma $6y+3$ è somma di sei interi consecutivi. In altre parole, un intero n è somma di sei interi consecutivi se e solo se n è divisibile per 3 ma non per 6. I numeri interi divisibili contemporaneamente per 3, per 5 e per 7 sono i multipli di $3\cdot5\cdot7=105$, e fra essi quelli che non sono multipli di 6 sono tutti e soli quelli dispari. Pertanto dobbiamo calcolare il più piccolo intero dispari ≥ 2013 che sia multiplo di 105. La risposta è `2205`.

4. L'equazione data è equivalente a

$$17^3 = y^3-x^3 = (y-x)\cdot(y^2+xy+x^2). \tag{2}$$

Poiché 17 è primo, il numero $y-x$ dovrà assumere uno dei valori 1, 17, 17^2, 17^3. Distinguiamo i vari casi.

(a) Se $y-x=1$ allora dalla (2) si ha $17^3 = y^2+xy+x^2 = 3x^2+3x+1$. Ma $3x^2+3x+1 \equiv 1 \pmod 3$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ e $17^3 \equiv 2 \pmod 3$, quindi non abbiamo soluzioni.

(b) Se $y-x=17$ allora dalla (2) otteniamo $17^2 = 3x^2+3\cdot17x+17^2$, da cui $x=0$ (e $y=17$) oppure $x=-17$ (e $y=0$).

(c) Se $y-x=17^2$ allora la (2) può essere riscritta come

$$17 = y^2+xy+x^2 = 3x^2+3x\cdot17^2+17^4, \tag{3}$$

quindi x deve essere multiplo di 17. Ma se $17 \mid x$ allora il membro di destra della (3) è divisibile per 17^2, il che è impossibile. Pertanto non vi sono soluzioni.

(d) Se $y-x=17^3$ allora la (2) può essere riscritta come

$$1 = 3x^2+3\cdot17^3x+17^6. \tag{4}$$

Ma è immediato verificare che l'equazione (4) non ha soluzioni reali (il discriminante è negativo), pertanto non vi sono soluzioni.

In conclusione, le uniche soluzioni intere dell'equazione data sono $(0,17)$ e $(-17,0)$. La risposta è `0002`.

5. Osserviamo preliminarmente che se x è multiplo di 3 allora x^s+1 non è multiplo di 3 per alcun intero s. Supponiamo ora che s sia pari, diciamo $s=2t$; allora possiamo scrivere

$$x^s+1 = (x^t-1)\cdot(x^t+1)+2,$$

e segue facilmente che x^s+1 non è mai divisibile per 3 (questo perché x^t-1, x^t, x^t+1 sono tre interi consecutivi, di cui uno è necessariamente multiplo di 3). D'altra parte, se s è dispari allora possiamo scrivere

$$x^s+1 = (x+1)\cdot(x^{s-1}-x^{s-2}+\ldots-x+1),$$

e concludiamo che x^s+1 è multiplo di 3 per ogni x tale che $x \equiv 2 \pmod 3$ (poiché, in tal caso, $x+1$ è multiplo di 3). In conclusione, dobbiamo contare gli interi dispari s tali che $2013 \leq s \leq 10001$. La risposta è `3995`.

6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $f(n) := n^7+n^6-n^5-n^4$. Allora possiamo scrivere

$$f(n) = n^4\cdot(n+1)^2\cdot(n-1).$$

Osserviamo innanzitutto che $f(0)=f(1)=0$, quindi studiamo $f(n)$ solo per $n\geq 2$. Definiamo

$$d := \mathrm{MCD}\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Si ha

$$f(2) = 2^4\cdot3^2, \qquad f(4) = 2^8\cdot3\cdot5^2,$$

quindi $\mathrm{MCD}(f(2), f(4)) = 2^4\cdot3 = 48$. Pertanto $d \mid 48$. Per mostrare che, in effetti, $d=48$ facciamo vedere che $2^4 \mid f(n)$ e $3 \mid f(n)$ per ogni $n\geq2$. Per cominciare, (esattamente) uno dei tre interi consecutivi $n-1$, n, $n+1$ è divisibile per 3, quindi $3 \mid f(n)$ per ogni $n\geq2$. Per quanto riguarda il numero primo 2, se n è *pari* allora $2^4 \mid n^4$, da cui $2^4 \mid f(n)$; d'altra parte, se n è *dispari* allora sia $n-1$ sia $n+1$ sono pari ed (esattamente) uno di questi due numeri è divisibile per 4, da cui concludiamo che $2^4 \mid f(n)$ anche in questo caso. La risposta è `0048`.

Tabella risposte

1.	0001
2.	0001
3.	2205
4.	0002
5.	3995
6.	0048