COPPA GALILEO

La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Galileo 2013

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

---

1 Il Professor Rosolini ha una casa in campagna, nel comune di Voghera, dove trascorre le vacanze estive. La casa non è servita dall'acquedotto ma c'è un pozzo in giardino. In casa si trova un contenitore molto grande che viene riempito attingendo dal pozzo con dei secchi. Rosolini si vanta con gli amici di avere un secchio da un litro, uno da due, uno da tre e cosi via fino ad uno da n litri ma non rende noto il numero n. Il professore ogni mattina alle ore 8 sceglie casualmente due secchi, li riempe al pozzo e li svuota nel contenitore. Poi alle ore 9 sceglie ancora casualmente due secchi, li riempe dal contenitore ed usa il loro contenuto per cucinare, lavarsi etc.. per tutta la giornata. Un ospite incuriosito dalle stane manie Rosolini gli chiede come ha scelto il numero n. Egli risponde che si tratta del minimo intero pari che garantisce che la probabilità che il contenitore alle ore 7 e alle ore 10 contenga la stessa quantità di acqua sia inferiore al 1%. Quanti secchi possiede il Professore?

2 Dato un numero n denotiamo con $M(n)$ il minimo comune multiplo di tutti i numeri da 1 a n. Quando vale $\frac{M(130)}{M(120)}$?

3 Un'impresa di costruzioni ferroviarie costruisce una linea ferroviaria della lunghezza di 4710 metri. Può posare solo binari della lunghezza di 17 metri e binari della lunghezza di 19 metri. Il compenso ricevuto è pari a 10000 Euro per ogni binario posato. Quanti binari da 17 metri deve posare l'impresa per massimizzare il proprio profitto?

4 Determinare i numeri che si possono ottenere come massimo comune divisore di $20 + n$ e $30 + 2n$ al variare n fra gli interi positivi. Rispondere con il prodotto di tali numeri.

5 Il Professor Rosolini ha un animale da compagnia, un sarcophilus harrisii (volgarmente detto diavolo della Tansmania), per il quale ha costruito una cuccia. La cuccia ha forma di parallelepipedo rettangolo di altezza a, larghezza b e profondità c. La somma dei lati $a+b+c$ è 29 decimetri. La somma dei quadrati dei lati $a^2 + b^2 + c^2$ è 313 decimetri quadrati. La somma dei cubi dei lati è 3581 decimetri cubi. Qual è il volume della cuccia in decimetri cubi?

6 La Professoressa De Negri si trova in vacanza a Macao. La valuta locale è la pataca di Macao e circolano solo due tipi di banconote, la banconota del valore di 5 pataca e quella del valore di 7 pataca. De Negri a cena osserva che il conto che il cameriere gli ha appena portato è il massimo numero intero che non gli consente di saldare il conto pagando solo con banconote senza ricevere resto. Quanto spende la Professoressa De Negri?

7 Il Professor Rosolini si reca allo stadio per assistere alla partita di calcio Italia-Serbia. Mentre osserva i tifosi Serbi lanciare razzi dalle gradinate spiega al signore seduto accanto a sé, il signor Ivan, che se ogni spettatore lanciasse un razzo e colpisse uno degli spettatori (che potrebbe anche essere lui stesso!!!) si tratterebbe di un funzione da un insieme in se stesso. E che se l'insieme ha x elementi, ci sono x^x funzioni del genere. Mentre tornano a casa delusi dagli eventi, il signor Ivan chiede con curiosità al Professor Rosolini quanti dei numeri del tipo x^x con x intero positivo e minore di 2004 danno resto 2 se divisi per 5. Quanti?

COPPA GALILEO

Cenni di soluzioni

1 Possiamo identificare i secchi con i numero da 1 a n. Il Professore compie due scelte casuali di numeri fra 1 e n, diciamo a, b alle ore 8 e c, d alle ore 9 soggette alle condizioni $a \neq b$ e $c \neq d$. Quindi in tutto ci sono $\binom{n}{2}^2$ casi possibili. La quantità di acqua nel contenitore rimane invariata esattamente quando

$$(*) \quad a + b = c + d.$$

Dobbiamo quindi calcolare il numero delle soluzioni di tale equazioni (date le restrizioni su i numeri in gioco). Supponiamo per un momento che il numero dei secchi sia 6. $a + b$ può valere $3, 4, \ldots, 11$, ma in quanti modi posso ottenere una data somma? Contiamo: possiamo ottenere 3 una volta (come $1 + 2$) , 4 una volta, 5 due volte (come $1 + 4$ e $2 + 3$) e cosi via. Meglio mettere i dati in una tabella e giá che ci siamo calcoliamo l'analoga tabella anche per $n = 8$.

$n = 6$		$n = 8$	
3	1	3	1
4	1	4	1
5	2	5	2
6	2	6	2
7	3	7	3
8	2	8	3
9	2	9	4
10	1	10	3
11	1	11	3
		12	2
		13	2
		14	1
		15	1

Quindi per $n = 6$ il numero delle soluzioni dell'equazione $(*)$ è $1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$, cioè $4 \times 1^2 + 4 \times 2^2 + 3^2$. E per $n = 8$ si ha $4 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 4 \times 3^2 + 4^2$. Intuiamo subito la formula per n arbitrario pari, diciamo $n = 2m$. Si ha che il numero delle soluzioni di $(*)$ risulta essere $4 \times 1^2 + 4 \times 2^2 + \ldots + 4 \times (m-1)^2 + m^2$. Ricordando che

$$1^2 + 2^2 + \ldots + u^2 = \frac{u(u+1)(2u+1)}{6}$$

e con un po' di calcoli semplici si ottiene che il numero delle soluzioni di $(*)$ risulta essere:

$$\binom{n}{3} + \frac{n^2}{4}$$

Quindi dobbiamo identificare il minimo n pari in modo che

$$\frac{\binom{n}{3} + \frac{n^2}{4}}{\binom{n}{2}^2} < \frac{1}{100}$$

Tale numero è 68.

2 $M(n)$ è il prodotto di tutte le potenze p^a dove p è primo e $p^a \leq n < p^{a+1}$. Quindi per capire in cosa differiscono $M(130)$ e $M(120)$ ci dobbiamo chiedere quali numeri fra $121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130$ sono primi o potenze di primi. Essi sono $121 = 11^2$, $125 = 5^3$, 127 (è primo) e $128 = 2^7$. Quindi $M(130)/M(120) = 11 \times 5 \times 127 \times 2$ cioè 13970. La risposta da dare è quindi 9999.

3 Le soluzioni intere dell'equazione $17x + 19y = 4710$ si determinano come segue. Poniamo $N = 4710$, $a = 17$ e $b = 19$. Visto che $\text{MCD}(a, b) = 1$ si determinato, con l'Algoritmo Euclideo, due numeri interi x_0, y_0 tali che $ax_0 + by_0 = 1$. Le soluzioni intere dell'equazione $ax + 1by = N$ sono date da

$$\begin{cases} x = & Nx_0 - kb \\ y = & Ny_0 + ka \end{cases}$$

al variare di k negli interi.

Nel nostro caso si può prendere $x_0 = 9$ e $y_0 = -8$. Quindi le soluzioni intere di $17x + 19y = 4710$ sono date da

$$\begin{cases} x = & 4710 \times 9 - k \times 19 \\ y = & -4710 \times 8 + k \times 17 \end{cases}$$

con k intero. Se imponiamo che x, y siano ≥ 0 abbiamo che

$$\frac{4710 \times 8}{17} \leq k \leq \frac{4710 \times 9}{19}$$

cioè

$$2217 \leq k \leq 2231.$$

Per ottenere il valore massimo possibile di x scegliamo il valore di k più piccolo: $k = 2217$. Per tale valore otteniamo $x = 267$.

4 Se a, b, q, r sono numeri interi tali che $b = qa + r$ allora MCD(b, a) =MCD(r, a).

Abbiamo quindi MCD$(30+2n, 20+n)$ =MCD$(10+n, 20+n)$ in quanto $30+2n = 1\times(20+n)+(10+n)$. Analogamente MCD$(20+n, 10+n)$ =MCD$(10, 10+n)$ visto che $(20+n) = 1\times(10+n)+10$. Infine MCD$(10, 10+n)$ =MCD$(10, n)$. Quindi MCD$(30 + 2n, 20 + n)$ =MCD$(10, n)$.

Ne segue che i numeri del tipo MCD$(30 + 2n, 20 + n)$ sono esattamente i divisori di 10 ed il loro prodotto è $1 \times 2 \times 5 \times 10 = 100$.

5 Poniamo $p_1 = a + b + c$, $p_2 = a^2 + b^2 + c^2$ e $p_3 = a^3 + b^3 + c^3$. Conosciamo il valore di p_1, p_2, p_3 e vogliamo il valore di abc. Calcoliamo p_1^3 e p_1p_2:

$$p_1^3 = p_3 + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc$$

e

$$p_1p_2 = p_3 + (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2).$$

Visto che l'espressione in parentesi è la stessa posso sostituire ed ricavare abc in funzione di p_1, p_2, p_3. Si ottiene:

$$p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_3 = 6abc.$$

Sostituendo i valori di p_1, p_2 e p_3 abbiamo $abc = 720$.

6 Dobbiamo identificare il più grande intero che non si scrive come $5x + 7y$ con x, y interi non negativi. I numeri che posso scrivere con $5x + 7 \times 0$ con $x \geq 0$ sono i multipli naturali di 5.

Quelli che posso scivere come $5x + 7 \times 1$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 7 che danno resto 2 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 2$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 14 che danno resto 4 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 3$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 21 che danno resto 1 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 4$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 28 che danno resto 3 se divisi per 5.

Quindi tutti i numeri > 23 sono del tipo $5x + 7y$ con x, y interi non negativi e 23 non lo è.

7 Dobbiamo studiare l'equazione $x^x \equiv 2 \bmod (5)$. Visto che $x \equiv 0 \bmod (5)$ implica $x^x \equiv 0 \bmod (5)$, possiamo supporre che $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Il piccolo teorema di Fermat dice che, dato un numero primo p ed un intero a si ha che $a^{p-1} \equiv 1 \bmod (p)$ se $a \not\equiv 0 \bmod (p)$. Quindi sappiamo che $x^4 \equiv 1 \bmod (5)$ per ogni $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Siano r il resto della divisione di x per 5 e s il resto della divisione di x per 4 (4 è $5 - 1$). Abbiamo

$$x^x \equiv r^x \equiv r^{4t+s} \equiv (r^4)^t r^s \equiv 1^t r^s \equiv r^s$$

modulo 5. Quindi l'equazione diventa $r^s \equiv 2 \bmod (5)$ dove r varia in $\{1, 2, 3, 4\}$ ed s varia in $\{0, 1, 2, 3\}$. Verificando direttamente si vede che le uniche soluzioni sono $(r, s) = (2, 1)$ e $(r, s) = (3, 3)$. Quindi dobbiamo studiare due sistemi di congruenze:

$$(1) \begin{cases} x \equiv 2 & \bmod(5) \\ x \equiv 1 & \bmod(4) \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x \equiv 3 & \bmod(5) \\ x \equiv 3 & \bmod(4) \end{cases}$$

Il sistema (1) ha come soluzioni i numeri del tipo $17 + 20k$ con k intero mentre (2) ha come soluzione i numeri $3 + 20k$ con k intero. A questo punto dobbiamo calcolare quanti di questi numeri sono positivi e minori di 2004. Risultano essere 201.

Tabella risposte

1.	0068
2.	9999
3.	0267
4.	0100
5.	0720
6.	0023
7.	0201