# La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Galileo 2012

**Istruzioni Generali**

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

---

**1** Qual è il massimo comun divisore tra 5406 e 12084?

**2** Consideriamo l'insieme dei punti del piano $(a, b)$ con coordinate positive ed intere che verificano $1 \leq a \leq b \leq 100$ e $MCD(a, b) = 20$. Quanto vale in media $a + b$?

**3** Il nuovo primo ministro italiano, il professor Mario Monti, fra un bund, uno spread ed una tobin tax, dicide di varare una riforma del sistema nazionale dei giochi d'azzardo. Basta Lotto, Gratta-e-Vinci, Video Poker, Totocalcio etc.... Tutti questi giochi saranno sostituiti da un solo e semplice gioco la cui ideazione è affidata ad una task force di esperti guidata da un luminare del settore, il Prof. Rosolini. Il Prof. Rosolini accetta l'incarico e dopo un mese di estenuante lavoro ha pronta una proposta. Il gioco si chiamerà 123 e funziona come segue. Ogni sabato viene prodotta dal banco (il gestore del gioco) una sequenza casuale (con ripetizioni) di lunghezza $n \geq 2$ di numeri scelti fra $\{1, 2, 3\}$. I giocatori possono scommettere su una delle sei permutazioni di $\{1, 2, 3\}$. Se tale permutazione è presente nella sequenza estratta in tre posizioni consecutive allora il giocatore vince una cifra pari al doppio della puntata, altrimenti perde. Per esempio, se si punta su un euro su 132 e la sequenza estratta risulta essere 112131213321 si perde mentre se si punta un euro su 321 si vincono due euro. Ma il Prof. Rosolini ha ancora un problema: qual è il massimo valore di $n$ che garantisce, in media, la vittoria al banco?

**4** Un'impresa di construzioni ferroviarie costruisce una linea ferroviaria della lunghezza di 4710 metri. Può posare solo binari della lunghezza di 17 metri e binari della lunghezza di 19 metri. Il compenso ricevuto è pari a 10000 Euro per ogni binario posato. Quanti binari da 17 metri deve posare l'impresa per massimizzare il proprio profitto?

**5** Il signor I.G. Macdonald ha costruito una cuccia per il suo cane. La cuccia ha forma di parallelepipedo rettangolo di altezza $a$, larghezza $b$ e profondità $c$. La somma dei lati $a + b + c$ è 40 decimetri. La somma dei quadrati dei lati $a^2 + b^2 + c^2$ è 626 decimetri quadrati. La somma dei cubi dei lati è 11104 decimetri cubi. Qual è il volume della cuccia in decimetri cubi?

**6** La valuta della repubblica di Kitibari si chiama pataca di Kitibari (per distinguerla dalla pataca di Macao). Circolano solo due tipi di banconote, la banconota del valore di 5 pataca e quella del valore di 7 pataca. Il signor Frobenius si trova in vacanza a Kitibari e a cena osseva che il conto che il cameriere gli ha appena portato è il massimo numero intero che non gli consente di saldare il conto pagando solo con banconote senza ricevere resto. Quanto spende il signor Frobenius?

**7** Il prof. Rosolini si reca allo stadio per assistere alla partita di calcio Italia-Serbia. Mentre osserva i tifosi Serbi lanciare razzi dalle gradinate spiega al signore seduto accanto a sé, il signor Ivan, che se ogni spettatore lanciasse un razzo e colpisse uno degli spettatori (che potrebbe anche essere lui stesso!!!) si tratterebbe di un funzione da un insieme in se stesso. E che se l'insieme ha $x$ elementi, ci sono $x^x$ funzioni del genere. Mentre tornano a casa delusi dagli eventi, il signor Ivan chiede con curiosità al prof. Rosolini quanti dei numeri del tipo $x^x$ con $x$ intero positivo e minore di 2004 danno resto 2 se divisi per 5. Quanti?

**8** Chiamando con $f(t)$ la distanza percorsa da un razzo in fase di spinta dopo $t$ secondi dalla partenza, sappiamo che $f(1) = 100m$ e $f(2) = 600m$. Sappiamo anche che $f(t)$ è un polinomio di terzo grado in $t$ e che verifica l'equazione $t^3 f(t^{-1}) = f(t)$ per ogni $t$ (numero reale). Che distanza, espressa in metri, ha percorso il razzo fra il quinto ed il sesto secondo?

COPPA GALILEO 2012

# Cenni di soluzioni

**1** Si applica l'algoritmo Euclideo:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{14062} & = & 2\times\mathbf{6319}+\mathbf{1424} \\ \mathbf{6319} & = & 4\times\mathbf{1424}+\mathbf{623} \\ \mathbf{1424} & = & 2\times\mathbf{623}+\mathbf{178} \\ \mathbf{623} & = & 3\times\mathbf{178}+\mathbf{89} \\ \mathbf{178} & = & 2\times\mathbf{89}+\mathbf{0} \end{array}$$

Si deduce che il MCD è 89.

**2** Se $a, b, q, r$ sono numeri interi tali che $b = qa + r$ allora MCD$(b, a)$ =MCD$(r, a)$.

Abbiamo quindi MCD$(20 + n, 10 + n)$ =MCD$(10, 10 + n)$ visto che $(20 + n) = 1 \times (10 + n) + 10$.

Analogamente, MCD$(10, 10 + n)$ =MCD$(10, n)$. Quindi MCD$(20 + n, 10 + n)$ =MCD$(10, n)$.

Ne segue che i numeri del tipo MCD$(20 + n, 10 + n)$ sono esattamente i divisori di 10 ed il loro prodotto è $1 \times 2 \times 5 \times 10 = 100$.

**3** Le soluzioni intere dell'equazione $17x + 19y = 4710$ si determinano come segue. Poniamo $N = 4710$, $a = 17$ e $b = 19$. Visto che MCD$(a, b) = 1$ si determinato, con l'Algoritmo Euclideo, due numeri interi $x_0, y_0$ tali che $ax_0 + by_0 = 1$. Le soluzioni intere dell'equazione $ax + 1by = N$ sono date da

$$\begin{cases} x = & Nx_0 - kb \\ y = & Ny_0 + ka \end{cases}$$

al variare di $k$ negli interi.

Nel nostro caso si può prendere $x_0 = 9$ e $y_0 = -8$. Quindi le soluzioni intere di $17x + 19y = 4710$ sono date da

$$\begin{cases} x = & 4710 \times 9 - k \times 19 \\ y = & -4710 \times 8 + k \times 17 \end{cases}$$

con $k$ intero. Se imponiamo che $x, y$ siano $\geq 0$ abbiamo che

$$\frac{4710 \times 8}{17} \leq k \leq \frac{4710 \times 9}{19}$$

cioè

$$2217 \leq k \leq 2231.$$

Per ottenere il valore massimo possibile di $x$ scegliamo il valore di $k$ più piccolo: $k = 2217$. Per tale valore otteniamo $x = 267$.

**4** Poniamo $p_1 = a + b + c$, $p_2 = a^2 + b^2 + c^2$ e $p_3 = a^3 + b^3 + c^3$. Conosciamo il valore di $p_1, p_2, p_3$ e vogliamo il valore di $abc$. Calcoliamo $p_1^3$ e $p_1p_2$:

$$p_1^3 = p_3 + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc$$

e

$$p_1p_2 = p_3 + (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2).$$

Visto che l'espressione in parentesi è la stessa posso sostituire ed ricavare $abc$ in funzione di $p_1, p_2, p_3$. Si ottiene:

$$p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_3 = 6abc.$$

Sostituendo i valori di $p_1, p_2$ e $p_3$ abbiamo $abc = 1848$.

**5** Dobbiamo identificare il più grande intero che non si scrive come $5x + 7y$ con $x, y$ interi non negativi. I numeri che posso scrivere con $5x + 7 \times 0$ con $x \geq 0$ sono i multipli naturali di 5.

Quelli che posso scivere come $5x + 7 \times 1$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri $\geq 7$ che danno resto 2 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 2$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri $\geq 14$ che danno resto 4 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 3$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri $\geq 21$ che danno resto 1 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 4$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri $\geq 28$ che danno resto 3 se divisi per 5.

Quindi tutti i numeri $> 23$ sono del tipo $5x + 7y$ con $x, y$ interi non negativi e 23 non lo è.

**6** Dobbiamo studiare l'equazione $x^x \equiv 2 \bmod (5)$. Visto che $x \equiv 0 \bmod (5)$ implica $x^x \equiv 0 \bmod (5)$, possiamo supporre che $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Il piccolo teorema di Fermat dice che, dato un numero primo $p$ ed un intero $a$ si ha che $a^{p-1} \equiv 1 \bmod (p)$ se $a \not\equiv 0 \bmod (p)$. Quindi sappiamo che $x^4 \equiv 1 \bmod (5)$ per ogni $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Siano $r$ il resto della divisione di $x$ per 5 e $s$ il resto della divisione di $x$ per 4 (4 è $5-1$). Abbiamo

$$x^x \equiv r^x \equiv r^{4t+s} \equiv (r^4)^t r^s \equiv 1^t r^s \equiv r^s$$

modulo 5. Quindi l'equazione diventa $r^s \equiv 2 \bmod (5)$ dove $r$ varia in $\{1,2,3,4\}$ ed $s$ varia in $\{0,1,2,3\}$. Verificando direttamente si vede che le uniche soluzioni sono $(r,s) = (2,1)$ e $(r,s) = (3,3)$. Quindi dobbiamo studiare due sistemi di congruenze:

$$(1)\begin{cases} x \equiv 2 & \bmod(5) \\ x \equiv 1 & \bmod(4) \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x \equiv 3 & \bmod(5) \\ x \equiv 3 & \bmod(4) \end{cases}$$

Il sistema (1) ha come soluzioni i numeri del tipo $17 + 20k$ con $k$ intero mentre (2) ha come soluzione i numeri $3 + 20k$ con $k$ intero. A questo punto dobbiamo calcolare quanti di questi numeri sono positivi e minori di 2004. Risultano essere 201.

**7** $f(t)$ è un polinomio di grado 3 che scriviamo $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Imponendo $f(1) = 100m$ e $f(2) = 600m$ abbiamo

$$\begin{cases} a + b + c + d & = 100 \\ 2^3 a + 2^2 b + 2c + d & = 600 \end{cases}$$

inoltre l'equazione $t^3 f(t^{-1}) = f(t)$ per ogni $t$ di traduce in $a = d$ e $b = c$. Abbiamo quindi abbastanza equazioni per risolvere il sistema e ricavare i valori di $a, b, c, d$. Segue che $f(t) = 100t^3 - 50t^2 - 50t + 100$ e che $f(6) - f(5) = 8500m$.

Tabella risposte

| | |
|---|---|
| 1. | 0089 |
| 2. | 0100 |
| 3. | 0267 |
| 4. | 1848 |
| 5. | 0023 |
| 6. | 0201 |
| 7. | 8500 |