Problemi per venerdi 13 gennaio 2012

Mihaela Badescu

PROBLEMA 1: a) In quanti modi diversi si possono collocare n torri su una tavola da scacchi avente n^2 campi in modo tale che non si minacciano una con l'altra?

b) In quanti modi diversi n torri si possono collocare su una tavola da scacchi avente n^2 campi in modo tale che non si minacciano una con l'altra, e nessuna torre si trovi sulla diagonale che unisce il vertice basso sinistro con il vertice alto destro?

c) In quanti modi diversi una torre può passare una dal campo $(0,0)$ al campo (m,n) se supponiamo che la torre si può muovere ad ogni passo solo orisontalmente a destra oppure verticalmente in alto?

Parte teorica per il Problema 1: permutazioni, permutazioni senza nessun punto fisso, combinazioni.

PROBLEMA 2: Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2mx^2 + 4mx - 2m - 1, m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

a) Determinare tutti i valori del parametro $m \in \mathbb{R}$ tali che il grafico di f interseca l'asse Ox in due punti $P_1 = (x_1, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0)$, con $x_1 \in (-1, 0)$ e $x_2 \in (1, 2)$.

b) Determinare tutti i valori del parametro $m \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $2mx^2 + 4mx - 2m - 1 = 0$ ammetta due radici reali minori di 1.

Parte teorica per il problema 2: segno della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la posizione delle radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ rispetto a un intervallo (u, v).

PROBLEMA 3: Consideriamo una circonferenza $\mathcal{C}$ e un punto A. Una secante variabile d passante per A interseca la circonferenza $\mathcal{C}$ in due punti M, N. Si trovi il luogo geometrico dei punti $B \in d$ coniugati con A rispetto a M e N, cioè i punti $B \in d$ tali che $\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}$.

Parte teorica per il problema 2: inverssioni di polo O e potenza k. Definizione. Due punti inversi sono coniugati rispetto al cerchio di inversione. Un cerchio che passa per due punti inversi è ortogonale al cerchio di inversione. Due punti A e B e i loro inversi A' e B' sono conciclici e si ha

$$A'B' = AB \cdot \frac{k}{OA \cdot OB}.$$

L'inversa di una retta. L'inverso di un cerchio.