



Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

1 In quanti modi si può scrivere 12 come somma di sei numeri naturali non nulli, tenendo conto dell'ordine dei termini?

[Ad esempio, si considerano diverse le scritture $12 = 5 + 7$ e $12 = 7 + 5$.]

2 Un orefice prepara una palla di oro e argento che ha una massa di 300 g ed un volume di 20 cm^3 . La densità dell'oro è 19 g/cm^3 , quella dell'argento è 10 g/cm^3 . Qual è il rapporto tra la massa di oro e argento nella palla?

Rispondere fornendo il rapporto moltiplicato per 1000.

3 Alla fine della scrittura estesa di 2011! quante cifre 0 ci sono?

4 E' facile dividere un triangolo in 3 triangoli in modo che in ciascun vertice della figura ottenuta si incontrino lo stesso numero di lati (il numero di lati che si incontrano in un medesimo vertice è tre).

Quali numeri a , maggiori di 3, hanno la stessa proprietà, cioè si può dividere un triangolo in a triangoli in modo che in ogni vertice si incontrino lo stesso numero di lati?

[**Attenzione:** la proprietà non richiede che il numero di lati che si incontrano in un medesimo vertice coincida con il numero di triangoli usati.]

Rispondere fornendo la somma di tali numeri a .

5 Gli studenti della sezione A si vantano di essere più alti degli studenti della sezione B. Un giorno, uno studente della sezione B, guardando in alto negli occhi uno studente della sezione A, gli chiede: «Che cosa intendi dire quando affermi che voi A siete più alti di noi B? Vuoi dire che

1. Ogni A è più alto di ogni B?
2. Il più alto A è più alto del più alto B?
3. Ogni A è più alto di qualche B?
4. Ogni B è più basso di qualche A?
5. Ad ogni A corrisponde un B più basso senza che uno stesso B corrisponda a due A diversi?
6. Ad ogni B corrisponde un A più alto senza che uno stesso A corrisponda a due B diversi?
7. Il più basso tra i B è più basso del più basso degli A?
8. Il più basso A supera in altezza più B di quanti A sono superati dal più alto B?
9. La somma delle altezze degli A è maggiore della somma delle altezze dei B?
10. L'altezza media degli A è maggiore dell'altezza media dei B?
11. Ci sono più A che superano in altezza qualche B di quanti sono i B che superano in altezza qualche A?
12. Gli A la cui altezza supera l'altezza media dei B sono più dei B la cui altezza supera l'altezza media degli A?»

Sommerso dal torrente di domande, lo studente della sezione A si fa piccolo piccolo cercando di capire quali sono le coppie di domande tali che la risposta "sì" alla prima comporta la risposta "sì" alla seconda. Quante sono queste coppie?

6 Per l'elezione del sindaco di Paperopoli si presentano due candidati: Zio Paperone e Rockerduck. Nel seggio di via Dodecaneso votano 200 elettori di cui il 60% sceglie Zio Paperone. All'uscita Paperino domanda a tutti quale candidato hanno votato. Rispondono alla domanda il 30% degli elettori di Zio Paperone ed il 55% degli elettori di Rockerduck. Tra coloro che hanno risposto a Paperino, qual è la percentuale di elettori che hanno votato per Rockerduck?

Rispondere fornendo le prime quattro cifre dopo la virgola della percentuale espressa come numero decimale (compreso tra 0 ed 1).

7 Nel triangolo ABC , si conoscono $AB = 75$ m, $AC = 124$ m e l'altezza $AD = 60$ m. Sia H il punto di incontro delle tre altezze del triangolo, il cosiddetto ortocentro del triangolo. Quanto vale la lunghezza $BH \cdot \frac{CH}{DH}$?

8 Su uno stesso lato di Via Garibaldi, vi sono nove edifici numerati progressivamente da 1 a 9. Al civico 1 abita Ernesto, mentre al civico 5 si trova la famosa enoteca **Probabilmente Bacco**. Una sera Ernesto alza troppo il gomito ed esce da **Probabilmente Bacco** completamente ubriaco non ricordando più la strada per tornare a casa. Decide di lanciare una moneta equilibrata: se esce *testa* si sposterà al civico successivo, se esce *croce* al civico precedente, ripetendo quindi la procedura. Scrivere il rapporto tra la probabilità che, dopo quattro lanci, sia arrivato davanti a casa e la probabilità che, dopo quattro lanci, sia nuovamente davanti all'enoteca.

Rispondere fornendo la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

9 La password del computer dove sono conservate le domande della Coppa Fermat è costituita da quattro cifre. Pino l'ha scelta estraendo a caso quattro palline da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6 (dopo ciascuna estrazione non rimette la pallina dentro l'urna). Qual è la probabilità che la password contenga le prime 3 cifre del numero π (nell'ordine corretto e senza considerare la virgola)?

Rispondere fornendo le prime quattro cifre dopo la virgola della probabilità calcolata.

10 Quante sono le successioni di numeri reali positivi a_0, a_1, a_2, \dots tali che

$$a_0 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+2} = a_n - a_{n+1} ?$$

11 Sia ABC un triangolo in cui $AB = 5$ m, $BC = 10$ m e l'altezza AD sia 4 m. Il centro di un rettangolo è l'intersezione delle diagonali del rettangolo. Si consideri il luogo geometrico dei punti I che sono centri dei rettangoli $MNPQ$, con M, N su BC , P su AC e Q su AB ; sia ℓ la lunghezza del luogo geometrico. Quanto vale $\ell \cdot \sqrt{2}$?

12 Un gruppo di 10 studenti del corso di laurea in matematica si riunisce per una festa. Ognuno di loro ha portato un piatto contenente del cibo di propria produzione. Si decide di distribuire i piatti in modo casuale. I piatti vengono numerati da uno a dieci, vengono inseriti i nomi dei partecipanti in sacchetto ed estratti. Al primo estratto viene assegnato il piatto numero 1, al secondo il numero 2 e così via. Qual è la probabilità che nessuno mangi il cibo di propria produzione?

Rispondere fornendo le prime quattro cifre dopo la virgola della probabilità calcolata.

13 In quanti modi si può colorare un dodecaedro regolare (cioè con facce pentagoni regolari) usando quattro colori in modo che facce adiacenti abbiano sempre colori diversi?

Due colorazioni sono da considerarsi la stessa se una si ottiene ruotando il dodecaedro colorato con l'altra.

14 Un grande recinto quadrato di lato 1 km viene diviso in tre zone costruendo tre recinti rettilinei. Comunque si esegua una tale divisione, in una delle tre zone ci sono due punti a una distanza superiore a ℓ metri. In una qualunque divisione del grande recinto, è ovvio come trovare due punti in una delle tre zone a distanza superiore a 500 metri. Ma quanto può valere al massimo ℓ ?

Cenni di soluzioni

1 Nella scrittura $12 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ci sono 11 segni $+$. Una scrittura richiesta corrisponde a una scelta di 5 segni $+$. Perciò esistono $\binom{11}{5} = 462$ modi di scrivere 12 come somma a 6 numeri naturali positivi, tenendo conto dall'ordine.

2 La densità è il rapporto tra massa e volume. Dunque la densità del miscuglio è

$$d_m = \frac{m_m}{v_m} = \frac{d_o v_o + d_a v_a}{v_o + v_a} = \frac{d_o + d_a \frac{v_a}{v_o}}{1 + \frac{v_a}{v_o}}$$

da cui

$$\frac{v_a}{v_o} = \frac{d_o - d_m}{d_m - d_a}$$

e

$$\frac{m_o}{m_a} = \frac{d_o v_o}{d_a v_a} = \frac{d_o (d_m - d_a)}{d_a (d_o - d_m)} = \frac{19(15 - 10)}{10(19 - 15)} = 2.375$$

3 Bisogna trovare la potenza di 5 della scomposizione in numeri primi del numero 2011!. Cioè

$$\left[\frac{2011}{5} \right] + \left[\frac{2011}{25} \right] + \left[\frac{2011}{125} \right] + \left[\frac{2011}{625} \right] = 402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

4

5

6 Tra i 120 elettori di Zio Paperone rispondono $36 = 0.3 \cdot 120$, tra gli 80 elettori di Rockerduck rispondono $44 = 0.55 \cdot 80$. Rispondono a Paperino 80 persone per cui la percentuale di voti per Rockerduck è $100 \cdot 44/80 = 55$

7 Scrivendo l'area del triangolo HBC in due modi si ottiene

$$\text{Area}(HBC) = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot HC \cdot \sin(\pi - A) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot HD.$$

Ne risulta $\frac{HB \cdot HC}{HD} = \frac{BC}{\sin A}$. Il rapporto $\frac{BC}{\sin A}$ si ricava considerando

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD.$$

Quindi

$$\frac{HB \cdot HC}{HD} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB \cdot AC}{AD} = \frac{75 \cdot 124}{60} = 155.$$

8 Per arrivare al civico 1, Ernesto deve ottenere 4 croci in 4 lanci, la cui probabilità è: $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Per ritornare all'enoteca, Ernesto deve ottenere 2 teste e 2 croci in 4 lanci, la cui probabilità è: $q = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Il rapporto è $p/q = \frac{2}{4 \cdot 3} = 1/6$.

9 Il numero N di possibili password è $N = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, il numero M di casi favorevoli è $M = 2 \cdot 3$, perché ci sono due possibilità per la scelta del posto per il "3" e 3 possibilità per la scelta della quarta cifra. Il risultato è $\frac{1}{60}$.

10

11 Il luogo geometrico è il segmento NM dove N è il punto medio dell'altezza AD e M è il punto medio del lato BC . Guardando NM come mediana nel triangolo NBC si ottiene

$$NM^2 = \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot (NB^2 + NC^2) - BC^2] = \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot (13 + 53) - 100] = 8.$$

Perciò $l \cdot \sqrt{2} = 4$.

12 Si tratta di calcolare il numero delle applicazioni bigettive da un insieme di n elementi in se stesso senza punti fissi. Il principio di inclusione-esclusione dà come risultato che tale numero è $n! \sum_{i=0}^n (-1)^i / i!$. Quindi la probabilità è $\sum_{i=0}^{10} (-1)^i / i!$ che risulta essere 0.367879464, quindi la risposta è 3678.

13

14

Tabella risposte

1	0462
2	2375
3	0501
4	0026
5	0031
6	5500
7	0155
8	0007
9	0166
10	0001
11	0004
12	3678
13	0004
14	1007