La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Fermat 2011

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.

---

1 In una scuola vengono scelti 10 studenti per formare la squadra che gareggerà nella Coppa Fermat 2011. Quante squadre diverse si possono formare, designando anche capitano e consegnatore?

2 Per far parte del club dei Bugiardi Onesti si deve avere una caratteristica cruciale: dire sempre la verità (cioè, come si definiscono i membri del club, essere "sincero") oppure dire sempre il contrario della verità (cioè essere "bugiardo"). Una volta alla settimana i membri del club pranzano insieme seduti ad una tavola rotonda. Oggi, appena seduti, hanno detti tutti la stessa frase: «Quelli seduti a fianco a me sono uno sincero e l'altro bugiardo.»I sinceri sono 76, quanti sono i bugiardi?

3 Un'impresa di construzioni ferroviarie costruisce una linea ferroviaria della lunghezza di 4710 metri. Puó posare solo binari della lunghezza di 17 metri e binari della lunghezza di 19 metri. Il compenso ricevuto è pari a 10000 Euro per ogni binario posato. Quanti binari da 17 metri deve posare l'impresa per massimizzare il proprio profitto?

4 Il prof. Rosolini si reca allo stadio per assistere alla partita di calcio Italia-Serbia. Mentre osserva i tifosi Serbi lanciare razzi dalle gradinate spiega al signore seduto accanto a sé, il signor Ivan, che se ogni spettatore lanciasse un razzo e colpisse uno degli spettatori (che potrebbe anche essere lui stesso!!!) si tratterebbe di un funzione da un insieme in se stesso. E che se l'insieme ha x elementi, ci sono x^x funzioni del genere. Mentre tornano a casa delusi dagli eventi, il signor Ivan chiede con curiositá al prof. Rosolini quanti dei numeri del tipo x^x con x intero positivo e minore di 2004 danno resto 2 se divisi per 5. Quanti?

5 Nel paese di Arbulaz, una statistica ha ottenuto un risultato sorprendente: ogni anno, di mille studenti che si laureano, 50 sono matematici. Ai bambini dell'asilo viene fatto un test per verificare la loro attitudine alla matematica. La percentuale di falsi positivi (futuri non matematici che risultano positivi al test) è del 10%, mentre la percentuale di falsi negativi (futuri matematici che risultano negativi al test) è del 30%. Sapendo che il piccolo Francesco è positivo al test, sia p la probabilità che, quando si laurea, sia un matematico. Quanto vale p?

6 Nel 1970 i Beatles vennero a Genova in incognito e pernottarono all'albergo *Nicolas Bourbaki* (ora distrutto per costruire il dipartimento di matematica). L'albergo aveva 10 camere di lusso disposte dallo stesso lato di un corridoio rettilineo dell'ultimo piano. A ciascuno dei cantanti venne assegnata a caso una camera: qual è la probabilità che avessero quattro camere contigue?

7 Sul lato AB di un parallelogramma $ABCD$ si prenda un punto M tale che $\frac{BM}{AB} = \frac{1}{7}$. Sia N il punto di intersezione di CM e BD. Si calcoli $1000 \cdot \frac{BN}{BD}$.

8 In un triangolo ABC i cui lati misurano $AB = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $AC = 5\sqrt{6}\,\text{cm}$ e $BC = 8\,\text{cm}$ sia M il punto sul lato BC tale che $BM = 6\,\text{cm}$. Si calcoli $100 \cdot AM^2$.

Cenni di soluzioni

1 Il capitano è uno di 10, il consegnatore uno di 9, gli altri cinque sono tra otto, cioè una scelta tra $\binom{8}{5}$. In totale, le scelte sono $10 \cdot 9 \cdot \binom{8}{5} = 5040$.

2 Ogni sincero deve avere a fianco un sincero e un bugiardo. Del resto, un bugiardo a fianco di un sincero *deve* avere un altro sincero a fianco. Perciò ogni bugiardo ha a fianco due sinceri. I bugiardi sono la metà dei sinceri: 38.

3 Le soluzioni intere dell'equazione $17x + 19y = 4710$ si determinano come segue. Poniamo $N = 4710$, $a = 17$ e $b = 19$. Visto che $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$ si determinato, con l'Algoritmo Euclideo, due numeri interi x_0, y_0 tali che $ax_0 + by_0 = 1$. Le soluzioni intere dell'equazione $ax + 1by = N$ sono date da

$$\begin{cases} x = & Nx_0 - kb \\ y = & Ny_0 + ka \end{cases}$$

al variare di k negli interi.

Nel nostro caso si puó prendere $x_0 = 9$ e $y_0 = -8$. Quindi le soluzioni intere di $17x + 19y = 4710$ sono date da

$$\begin{cases} x = & 4710 \times 9 - k \times 19 \\ y = & -4710 \times 8 + k \times 17 \end{cases}$$

con k intero. Se imponiamo che x, y siano ≥ 0 abbiamo che

$$\frac{4710 \times 8}{17} \leq k \leq \frac{4710 \times 9}{19}$$

cioè

$$2217 \leq k \leq 2231.$$

Per ottenere il valore massimo possibile di x scegliamo il valore di k piú piccolo: $k = 2217$. Per tale valore otteniamo $x = 267$.

4 Dobbiamo studiare l'equazione $x^x \equiv 2 \bmod (5)$. Visto che $x \equiv 0 \bmod (5)$ implica $x^x \equiv 0 \bmod (5)$, possiamo supporre che $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Il piccolo teorema di Fermat dice che, dato un numero primo p ed un intero a si ha che $a^{p-1} \equiv 1 \bmod (p)$ se $a \not\equiv 0 \bmod (p)$. Quindi sappiamo che $x^4 \equiv 1 \bmod (5)$ per ogni $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Siano r il resto della divisione di x per 5 e s il resto della divisione di x per 4 (4 è $5 - 1$). Abbiamo

$$x^x \equiv r^x \equiv r^{4t+s} \equiv (r^4)^t r^s \equiv 1^t r^s \equiv r^s$$

modulo 5. Quindi l'equazione diventa $r^s \equiv 2 \bmod (5)$ dove r varia in $\{1, 2, 3, 4\}$ ed s varia in $\{0, 1, 2, 3\}$. Verificando direttamente si vede che le uniche soluzioni sono $(r, s) = (2, 1)$ e $(r, s) = (3, 3)$. Quindi dobbiamo studiare due sistemi di congruenze:

$$(1) \begin{cases} x \equiv 2 & \mathrm{mod}(5) \\ x \equiv 1 & \mathrm{mod}(4) \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x \equiv 3 & \mathrm{mod}(5) \\ x \equiv 3 & \mathrm{mod}(4) \end{cases}$$

Il sistema (1) ha come soluzioni i numeri del tipo $17 + 20k$ con k intero mentre (2) ha come soluzione i numeri $3 + 20k$ con k intero. A questo punto dobbiamo calcolare quanti di questi numeri sono positivi e minori di 2004. Risultano essere 201.

5 Su 1000 bambini, 50 diventeranno matematici mentre gli altri 950 non lo saranno. Del primo gruppo risultano positivi al test $50 * 0.7 = 35$, mentre del secondo gruppo $950 * 0.1 = 95$. Il numero totale di bambini positivi al test è quindi $35 + 95 = 130$, per cui $p = \frac{35}{130}$ da cui $p = 0.2\overline{692307}$.

6 l numero di modi di occupare 4 camere su 10 è

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210,$$

il numero di modi in cui si possono occupare 4 camere in modo consecutivo è 7, da cui la probabilità richiesta è $\frac{1}{30} = 0.0\overline{3}$.

7 La parallela per A alla retta CM interseca CD in P e BD in Q. Sia N il punto di intersezione di CM e BD.

Per il teorema di Talete si ha $\frac{BN}{BQ} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{7}$. Ne segue che $7 \cdot BN = BQ$. Dalla congruenza dei triangoli $\triangle BMN \equiv \triangle DPQ$ si trova $BN = QD$; quindi $BD = BQ + QD = 7BN + BN = 8BN$. Perciò $1000 \cdot \frac{BN}{BD} = 1000 \cdot \frac{1}{8} = 125$.

8 Se M fosse il punto medio del lato BC avremmo dovuto applicare il teorema della mediana. In questo caso più generale si applica il teorema di Silvester: Dati tre punti allineati A, B, C con B tra A e C, un punto O che non sta sulla retta AB, vale la relazione

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AC = AB \cdot BC \cdot AC.$$

La dimostrazione consiste nell'applicare due volte il teorema del coseno:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 - 2 \cdot OB \cdot AB \cdot \cos \widehat{OBA}$$
$$OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2 \cdot OB \cdot BC \cdot \cos \widehat{OBC}.$$

Sommando la prima relazione moltiplicata per BC con la seconda moltiplicata per AC si ottiene la relazione da dimostrare.

Adesso, ritornando al nostro problema e facendo le sostituzioni si ottiene

$$AM^2 \cdot 8 = 48 + 150 - 6 \cdot 2 \cdot 8 = 102$$

Perciò $100 \cdot AM^2 = 1275$.

Tabella risposte

1	5040
2	0038
3	0267
4	0201
5	2692
6	0333
7	0125
8	1275