



# La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Fermat 2011

## Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

---

**ATTENZIONE:** Tutti i quesiti richiedono il valore di una probabilità, che è un numero compreso tra 0 e 1. Si risponda *sempre* scrivendo il numero moltiplicato per 10000; in altre parole, se la probabilità calcolata è  $p$ , si risponda con la parte intera del numero  $p \times 10000$ .

**1** Nell'armadio di George ci sono 5 completi (pantaloni, giacca e camicia). Sua moglie Elisabetta ha numerato ciascun completo (da uno a cinque) in modo che George non mischi tra di loro i completi. Purtroppo, George ha bevuto un po' troppo e sceglie a caso una camicia, un paio di pantaloni ed una giacca. Qual è la probabilità che la somma dei numeri sui tre indumenti sia 9?

**2** Ogni giorno si svolge una lotteria in cui vengono estratti senza ripetizione 5 numeri da un'urna contenente 100 palline numerate da 1 a 100. Chi indovina uno dei cinque numeri estratti vince una serata con il suo attore preferito. Nell'estrazione del 28 gennaio Penelope, innamorata di Braid, scommette sull'uscita del "17", poiché l'ultima volta che il "17" è stato estratto era il primo gennaio. Qual è la probabilità che Penelope vada a cena con Braid?

**3** Nicole lancia un dado non truccato a 5 facce. Quindi Nicole lancia una moneta equilibrata tante volte quanto è stato l'esito del lancio del dado. Se  $p$  è la probabilità che il numero totale di teste uscite sia esattamente tre, quanto vale  $p$ ?

**4** Nello stato di Sparagnacco, la procedura per diventare professori all'università è la seguente. Da un'urna contenente 60 palline numerate da 1 a 60 vengono estratte ad una ad una tutte le palline (senza rimetterle dentro). Si diventa professori solo se alla 47-esima estrazione viene estratto il numero 47. Qual è la probabilità che Ernesto diventi professore?

**5** Nel paese di Arbulaz, una statistica ha ottenuto un risultato sorprendente: ogni anno, di mille studenti che si laureano, 50 sono matematici. Ai bambini dell'asilo viene fatto un test per verificare la loro attitudine alla matematica. La percentuale di falsi positivi (futuri non matematici che risultano positivi al test) è del 10%, mentre la percentuale di falsi negativi (futuri matematici che risultano negativi al test) è del 30%. Sapendo che il piccolo Francesco è positivo al test, sia  $p$  la probabilità che, quando si laurea, sia un matematico. Quanto vale  $p$ ?

**6** Una moneta in cui la probabilità che esca "testa" è del 20%, viene lanciata sette volte. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 4 "teste" e 3 "croci"?

**7** Nel 1970 i Beatles vennero a Genova in incognito e pernottarono all'albergo *Nicolas Bourbaki* (ora distrutto per costruire il dipartimento di matematica). L'albergo aveva 10 camere di lusso disposte dallo stesso lato di un corridoio rettilineo dell'ultimo piano. A ciascuno dei cantanti venne assegnata a caso una camera: qual è la probabilità che avessero camere contigue?

## Cenni di soluzioni

**1** Il numero di modi per scegliere un completo è  $5^3 = 125$ . Il numero di modi per cui la somma è *nove* è 19 poiché

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 2 = 6 \quad 1 + 3 + 5 \\ \quad \quad 3 \quad 1 + 4 + 4 \\ \quad \quad 3 \quad 2 + 2 + 5 \\ 3 \cdot 2 = 6 \quad 2 + 3 + 4 \\ \quad \quad 1 \quad 3 + 3 + 3, \end{array}$$

per cui la probabilità è  $\frac{19}{125} = 0.152$ .

**2** Se si ordinano le palline estratte, il numero di possibili estrazioni è  $100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 96$ , mentre le estrazioni in cui esce il "17" sono  $5 \times (99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 96)$ , per cui la probabilità è di  $\frac{5}{100} = 0.05$ .

**3** Se il risultato del lancio del dado è 1 o 2, non ci possono essere tre teste. Se esce 3, la probabilità di tre teste è  $(\frac{1}{2})^3$ ; se esce 4, la probabilità di tre teste è  $4(\frac{1}{2})^4$ ; se esce 5, la probabilità di tre teste è  $\frac{5 \cdot 4}{2} (\frac{1}{2})^5$ . La probabilità richiesta è

$$p = \frac{1}{5} \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \frac{5}{16} = \frac{11}{80}.$$

**4** Il numero di modi in cui si possono estrarre le 60 palline è  $60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 60!$ . I casi *favorevoli* sono quelli in cui al 47-esimo posto c'è la pallina contrassegnata con "47". Questo si può realizzare in  $59 \cdot 58 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 59!$ . La probabilità richiesta è:  $\frac{59!}{60!} = \frac{1}{60} = 0.01\bar{6}$

**5** Su 1000 bambini, 50 diventeranno matematici mentre gli altri 950 non lo saranno. Del primo gruppo risultano positivi al test  $50 * 0.7 = 35$ , mentre del secondo gruppo  $950 * 0.1 = 95$ . Il numero totale di bambini positivi al test è quindi  $35 + 95 = 130$ , per cui  $p = \frac{35}{130}$  da cui  $p = 0.2692307$ .

**6** Il numero di modi in cui si possono disporre quattro teste e tre croci è  $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$ . La probabilità di ottenere una fissata sequenza è  $(\frac{1}{5})^4 \times (\frac{4}{5})^3 = \frac{4^3}{5^7}$ , per cui la probabilità di avere 4 teste e 3 croci è

$$35 \cdot \frac{4^3}{5^7} = \frac{7 \cdot 2^{12}}{10^6} = 0.028672.$$

**7** Il numero di modi di occupare 4 camere su 10 è

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210,$$

il numero di modi in cui si possono occupare 4 camere in modo consecutivo è 7, da cui la probabilità richiesta è  $\frac{1}{30} = 0.0\bar{3}$ .