La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Fermat 2011

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

---

1 Sul lato BC di un triangolo ABC si considera un punto M tale che $\frac{MB}{MC} = 10$. Una parallela a BC taglia AB in D, AM in E e AC in F. Quanto vale il rapporto tra l'area del triangolo ADE e l'area del triangolo AEF?

2 Sia ABC un triangolo i cui lati misurano 5 cm, 6 cm e 7 cm. Si calcoli la parte intera di mille volte il rapporto fra il raggio della circonferenza circoscritta e il raggio della circonferenza iscritta nel triangolo.

3 Sul lato AB di un parallelogramma $ABCD$ si prenda un punto M tale che $\frac{BM}{AB} = \frac{1}{7}$. Sia N il punto di intersezione di CM e BD. Si calcoli $1000 \cdot \frac{BN}{BD}$.

4 Una retta passante per il baricentro di un triangolo ABC interseca AB nel punto M e AC nel punto N. Si calcoli $\frac{MB}{AM} + \frac{NC}{AN}$.

5 In un triangolo ABC i cui lati misurano $AB = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $AC = 5\sqrt{6}\,\text{cm}$ e $BC = 8\,\text{cm}$ sia M il punto sul lato BC tale che $BM = 6\,\text{cm}$. Si calcoli $100 \cdot AM^2$.

6 Su una circonferenza lunga 3141 cm si fissino tre punti A, B e C tali che $AB = BC$ e $BC = CA$. Si determini la lunghezza del luogo geometrico dei punti M che soddisfano la proprietà $MB + MC = MA$.

7 In un tetraedro $ABCD$ si sa che AC è lungo 10 cm, BD è lungo 8 cm e che l'angolo fra le rette AC e BD è di 60°. Siano M il punto medio dello spigolo AB e P il punto medio dello spigolo CD. Si determini la lunghezza del segmento $100 \cdot MP$.

Cenni di soluzioni

1 I triangoli ADE e ABM sono simili, così come i triangoli AEF e AMC. Dunque il rapporto tra le aree richiesto è uguale al rapporto delle aree di ABM e AMC. Questi hanno la stessa altezza e basi in rapporto 10/1.

La risposta è 10.

2 Denotiamo con r il raggio della circonferenza iscritta nel triangolo, R il raggio della circonferenza circoscritta, $p = \frac{a+b+c}{2}$ il semiperimetro del triangolo, S l'area del triangolo. Le formule che esprimino i due raggi in funzione dei lati del triangolo

$$S = p \cdot r \qquad a \cdot b \cdot c = 4 \cdot R \cdot S \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

portano al risultato

$$\frac{R}{r} = \frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 2,1875.$$

La risposta è 2187.

3 La parallela per A alla retta CM interseca CD in P e BD in Q. Sia N il punto di intersezione di CM e BD.

Per il teorema di Talete si ha $\frac{BN}{BQ} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{7}$. Ne segue che $7 \cdot BN = BQ$. Dalla congruenza dei triangoli $\triangle BMN \equiv \triangle DPQ$ si trova $BN = QD$; quindi $BD = BQ + QD = 7BN + BN = 8BN$. Perciò $1000 \cdot \frac{BN}{BD} = 1000 \cdot \frac{1}{8} = 125$.

4 Sia P l'intersezione di MN e BC. Per ipotesi la mediana AD interseca la retta MN nel baricentro G del triangolo.

Applicando il teorema di Menelao nel triangolo ABD tagliato da MGP si ottiene la relazione

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{GA}{GD} \cdot \frac{PD}{PB} = 1.$$

Ne risulta

$$\frac{MB}{MA} = \frac{PB}{PD} \cdot \frac{GD}{GA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{PB}{PD}.$$

Per lo stesso teorema applicato al triangolo ADC tagliato dalla secante GNP si trova

$$\frac{NC}{NA} \cdot \frac{GA}{GD} \cdot \frac{PD}{PC} = 1.$$

Ne risulta

$$\frac{NC}{NA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{PC}{PD}.$$

Di conseguenza

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{PB + PC}{PD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(PD + BD) + (PD - DC)}{PD} = 1.$$

5 Se M fosse il punto medio del lato BC avremmo dovuto applicare il teorema della mediana. In questo caso più generale si applica il teorema di Silvester: Dati tre punti allineati A, B, C con B tra A e C, un punto O che non sta sulla retta AB, vale la relazione

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AC = AB \cdot BC \cdot AC.$$

La dimostrazione consiste nell'applicare due volte il teorema del coseno:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 - 2 \cdot OB \cdot AB \cdot \cos \widehat{OBA}$$
$$OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2 \cdot OB \cdot BC \cdot \cos \widehat{OBC}.$$

Sommando la prima relazione moltiplicata per BC con la seconda moltiplicata per AC si ottiene la relazione da dimostrare.

Adesso, ritornando al nostro problema e facendo le sostituzioni si ottiene

$$AM^2 \cdot 8 = 48 + 150 - 6 \cdot 2 \cdot 8 = 102$$

Perciò $100 \cdot AM^2 = 1275$.

6 Il luogo geometrico $\{M \mid MB + MC = MA\}$ è l'arco di estremi B e C della circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Quindi

$$l(\widehat{\mathrm{BC}}) = \frac{3141}{3} = 147.$$

7 Siano N il punto medio di BC e Q il punto medio di AD. Nel parallelogramma $MNPQ$ abbiamo $MN = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ e $NP = \frac{BD}{2} = 4$. Gli angoli $\widehat{NMQ}$ e $\widehat{AC, BD}$ sono congruenti essendo angoli con i lati paralleli. Perciò $\widehat{NMQ} = 60°$. Applicando il teorema del coseno nel triangolo MNP si ottiene $NQ^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 21$. Se O è in punto medio del segmento NQ, si trova che $MP = 2 \cdot MO$. Calcolando la mediana $MO^2 = \frac{2 \cdot (5^2+4^2)-21}{4} = \frac{61}{4}$ si ottiene

$$MP = 2 \cdot MO = \sqrt{61} = 7,810 \;\text{ e quindi }\; 100 \cdot MQ = 781.$$