La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Fermat 2011

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

---

1 Qual è il massimo comun divisore tra 6319 e 14062?

2 Determinare i numeri che si possono ottenere come massimo comun divisore di $10+n$ e $20+n$ dove n è un intero e maggiore di 0. Rispondere con il prodotto di tali numeri.

3 Un'impresa di construzioni ferroviarie costruisce una linea ferroviaria della lunghezza di 4710 metri. Puó posare solo binari della lunghezza di 17 metri e binari della lunghezza di 19 metri. Il compenso ricevuto è pari a 10000 Euro per ogni binario posato. Quanti binari da 17 metri deve posare l'impresa per massimizzare il proprio profitto?

4 Il signor I.G.Macdonald ha costruito una cuccia per il suo cane. La cuccia ha forma di parallelepipedo rettangolo di altezza a, larghezza b e profonditá c. La somma dei lati $a+b+c$ è 40 decimetri. La somma dei quadrati dei lati $a^2+b^2+c^2$ è 626 decimetri quadrati. La somma dei cubi dei lati è 11104 decimetri cubi. Qual è il volume della cuccia in decimetri cubi?

5 La valuta della repubblica di Kitibari si chiama pataca di Kitibari (per distinguerla dalla pataca di Macao). Circolano solo due tipi di banconote, la banconota del valore di 5 pataca e quella del valore di 7 pataca. Il signor Frobenius si trova in vacanza a Kitibari e a cena osseva che il conto che il cameriere gli ha appena portato è il massimo numero intero che non gli consente di saldare il conto pagando solo con banconote senza ricevere resto. Quanto spende il signor Frobenius?

6 Il prof.Rosolini si reca allo stadio per assistere alla partita di calcio Italia-Serbia. Mentre osserva i tifosi Serbi lanciare razzi dalle gradinate spiega al signore seduto accanto a sé, il signor Ivan, che se ogni spettatore lanciasse un razzo e colpisse uno degli spettatori (che potrebbe anche essere lui stesso!!!) si tratterebbe di un funzione da un insieme in se stesso. E che se l'insieme ha x elementi, ci sono x^x funzioni del genere. Mentre tornano a casa delusi dagli eventi, il signor Ivan chiede con curiositá al prof.Rosolini quanti dei numeri del tipo x^x con x intero positivo e minore di 2004 danno resto 2 se divisi per 5. Quanti?

7 Chiamando con $f(t)$ la distanza percorsa da un razzo in fase di spinta dopo t secondi dalla partenza, sappiamo che $f(1) = 100m$ e $f(2) = 600m$. Sappiamo anche che $f(t)$ è un polinomio di terzo grado in t e che verifica l'equazione $t^3 f(t^{-1}) = f(t)$ per ogni t (numero reale). Che distanza, espressa in metri, ha percorso il razzo fra il quinto ed il sesto secondo?

Cenni di soluzioni

1 Si applica l'algoritmo Euclideo:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{14062} & = & 2\times \mathbf{6319}+\mathbf{1424} \\ \mathbf{6319} & = & 4\times \mathbf{1424}+\mathbf{623} \\ \mathbf{1424} & = & 2\times \mathbf{623}+\mathbf{178} \\ \mathbf{623} & = & 3\times \mathbf{178}+\mathbf{89} \\ \mathbf{178} & = & 2\times \mathbf{89}+\mathbf{0} \end{array}$$

Si deduce che il MCD è 89.

2 Se a, b, q, r sono numeri interi tali che $b = qa + r$ allora MCD(b, a) =MCD(r, a).

Abbiamo quindi MCD$(20 + n, 10 + n)$ =MCD$(10, 10 + n)$ visto che $(20 + n) = 1 \times (10 + n) + 10$.

Analogamente, MCD$(10, 10 + n)$ =MCD$(10, n)$. Quindi MCD$(20 + n, 10 + n)$ =MCD$(10, n)$.

Ne segue che i numeri del tipo MCD$(20 + n, 10 + n)$ sono esattamente i divisori di 10 ed il loro prodotto è $1 \times 2 \times 5 \times 10 = 100$.

3 Le soluzioni intere dell'equazione $17x + 19y = 4710$ si determinano come segue. Poniamo $N = 4710$, $a = 17$ e $b = 19$. Visto che MCD$(a, b) = 1$ si determinato, con l'Algoritmo Euclideo, due numeri interi x_0, y_0 tali che $ax_0 + by_0 = 1$. Le soluzioni intere dell'equazione $ax + 1by = N$ sono date da

$$\begin{cases} x = & Nx_0 - kb \\ y = & Ny_0 + ka \end{cases}$$

al variare di k negli interi.

Nel nostro caso si puó prendere $x_0 = 9$ e $y_0 = -8$. Quindi le soluzioni intere di $17x + 19y = 4710$ sono date da

$$\begin{cases} x = & 4710 \times 9 - k \times 19 \\ y = & -4710 \times 8 + k \times 17 \end{cases}$$

con k intero. Se imponiamo che x, y siano ≥ 0 abbiamo che

$$\frac{4710 \times 8}{17} \leq k \leq \frac{4710 \times 9}{19}$$

cioè

$$2217 \leq k \leq 2231.$$

Per ottenere il valore massimo possibile di x scegliamo il valore di k piú piccolo: $k = 2217$. Per tale valore otteniamo $x = 267$.

4 Poniamo $p_1 = a + b + c$, $p_2 = a^2 + b^2 + c^2$ e $p_3 = a^3 + b^3 + c^3$. Conosciamo il valore di p_1, p_2, p_3 e vogliamo il valore di abc. Calcoliamo p_1^3 e p_1p_2:

$$p_1^3 = p_3 + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc$$

e

$$p_1p_2 = p_3 + (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2).$$

Visto che l'espressione in parentesi è la stessa posso sostituire ed ricavare abc in funzione di p_1, p_2, p_3. Si ottiene:

$$p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_3 = 6abc.$$

Sostituendo i valori di p_1, p_2 e p_3 abbiamo $abc = 1848$.

5 Dobbiamo identificare il piú grande intero che non si scrive come $5x + 7y$ con x, y interi non negativi. I numeri che posso scrivere con $5x + 7 \times 0$ con $x \geq 0$ sono i multipli naturali di 5.

Quelli che posso scivere come $5x + 7 \times 1$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 7 che danno resto 2 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 2$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 14 che danno resto 4 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 3$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 21 che danno resto 1 se divisi per 5.

I numeri del tipo $5x + 7 \times 4$ con $x \geq 0$ sono esattamente i numeri ≥ 28 che danno resto 3 se divisi per 5.

Quindi tutti i numeri > 23 sono del tipo $5x + 7y$ con x, y interi non negativi e 23 non lo è.

6 Dobbiamo studiare l'equazione $x^x \equiv 2 \bmod (5)$. Visto che $x \equiv 0 \bmod (5)$ implica $x^x \equiv 0 \bmod (5)$, possiamo supporre che $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Il piccolo teorema di Fermat dice che, dato un numero primo p ed un intero a si ha che $a^{p-1} \equiv 1 \bmod (p)$ se $a \not\equiv 0 \bmod (p)$. Quindi sappiamo che $x^4 \equiv 1 \bmod (5)$ per ogni $x \not\equiv 0 \bmod (5)$. Siano r il resto della divisione di x per 5 e s il resto della divisione di x per 4 (4 è $5 - 1$). Abbiamo

$$x^x \equiv r^x \equiv r^{4t+s} \equiv (r^4)^t r^s \equiv 1^t r^s \equiv r^s$$

modulo 5. Quindi l'equazione diventa $r^s \equiv 2 \bmod (5)$ dove r varia in $\{1, 2, 3, 4\}$ ed s varia in $\{0, 1, 2, 3\}$. Verificando direttamente si vede che le uniche soluzioni sono $(r, s) = (2, 1)$ e $(r, s) = (3, 3)$. Quindi dobbiamo studiare due sistemi di congruenze:

$$(1) \begin{cases} x \equiv 2 & \mathrm{mod}(5) \\ x \equiv 1 & \mathrm{mod}(4) \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x \equiv 3 & \mathrm{mod}(5) \\ x \equiv 3 & \mathrm{mod}(4) \end{cases}$$

Il sistema (1) ha come soluzioni i numeri del tipo $17 + 20k$ con k intero mentre (2) ha come soluzione i numeri $3 + 20k$ con k intero. A questo punto dobbiamo calcolare quanti di questi numeri sono positivi e minori di 2004. Risultano essere 201.

7 $f(t)$ è un polinomio di grado 3 che scriviamo $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Imponendo $f(1) = 100m$ e $f(2) = 600m$ abbiamo

$$\begin{cases} a + b + c + d & = 100 \\ 2^3 a + 2^2 b + 2c + d & = 600 \end{cases}$$

inoltre l'equazione $t^3 f(t^{-1}) = f(t)$ per ogni t di traduce in $a = d$ e $b = c$. Abbiamo quindi abbastanza equazioni per risolvere il sistema e ricavare i valori di a, b, c, d. Segue che $f(t) = 100t^3 - 50t^2 - 50t + 100$ e che $f(6) - f(5) = 8500m$.