La Matematica in Gara

Allenamenti per la Coppa Fermat 2011

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre produrre un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \pi = 3,142.$$

---

1 Qual è la somma dei primi 150 numeri interi positivi esclusi i multipli di 11 e i multipli di 13?

2 Alberto trova scritti i numeri 34 e 21 sulla lavagna. Decide di industriarsi a scrivere somme e differenze di numeri che vede già scritti sulla lavagna. Qual è il più grande numero di 4 cifre che Alberto potrebbe finire scrivere?

3 In una scuola vengono scelti 10 studenti per formare la squadra che gareggerà nella Coppa Fermat 2011. Quante squadre diverse si possono formare, designando anche capitano e consegnatore?

4 Per far parte del club dei Bugiardi Onesti si deve avere una caratteristica cruciale: dire sempre la verità (cioè, come si definiscono i membri del club, essere “sincero”) oppure dire sempre il contrario della verità (cioè essere “bugiardo”). Una volta alla settimana i membri del club pranzano insieme seduti ad una tavola rotonda. Oggi, appena seduti, hanno detti tutti la stessa frase: «Quelli seduti a fianco a me sono uno sincero e l’altro bugiardo.»I sinceri sono 76, quanti sono i bugiardi?

5 Le 48 tende di un accampamento militare di forma rettangolare sono sistemate molto ben ordinate in modo che siano tutte separate tra loro da nove vialetti che vanno da nord a sud e da sette vialetti che vanno da est a ovest. Le guardie devono attraversare l’accampamento per controllare, partendo da un vertice del rettangolo e arrivando al vertice opposto. Di notte fanno sempre il percorso più breve. Quanti sono i percorsi possibili dal vertice a sud-ovest al vertice a nord-est?

6 Usando tre A, tre R, due E e una S, quante parole diverse (anche senza senso) si possono scrivere?

7 Gli alberi di un giardino hanno strane caratteristiche comuni: hanno tutti 1777 rami (contando anche il tronco come ramo), ogni ramo si biforca in altri due rami oppure termina con un frutto oppure con due frutti. Qual è la differenza tra il massimo e il minimo numero di frutti che si possono aspettare da un albero nel giardino?

8 Alberto deve raccogliere sette palline colorate in sette colori diversi in tre scatole: una rossa, una nera, una bianca. Quanti sono i modi di distribuire le sette palline nelle tre scatole?

Cenni di soluzioni

1 Per calcolare la somma richiesta, conviene

- sommare i primi 150 numeri

$$\begin{array}{rl} 1+\quad 2+\quad 3+\ldots+75 & + \\ 150+149+148+\ldots+76 & = \frac{1}{2}\cdot 150\cdot 151 = 11325 \end{array}$$

- togliere la somma dei multipli di 11

$$11+22+\ldots+143 = 11\cdot(1+2+\ldots+13) = 11\cdot\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14 = 1001$$

- e la somma dei multipli di 13

$$13+26+\ldots+143 = 13\cdot(1+2+\ldots+11) = 13\cdot\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 12 = 858$$

- aggiungere la somma dei multipli comuni di 11 e 13, perchè sono stati cancellati due volte

$$143$$

In totale,

$$11325 - 1001 - 858 + 143 = 9609.$$

2 Il massimo comun divisore tra 34 e 21 è 1, perciò il massimo numero di quattro cifre che Alberto può scrivere è 9999.

L'algoritmo di Euclide per determinare un'espressione di 9999 come somma di un multiplo di 34 e di uno di 21 produce

$$\begin{array}{rcl} 34 = 1\cdot 21+13 & & = 5\cdot 21 - 8(34-21) = 13\cdot 21 - 8\cdot 34 \\ 21 = 1\cdot 13+8 & & = 5\cdot(21-13) - 3\cdot 13 = 5\cdot 21 - 8\cdot 13 \\ 13 = 1\cdot 8+5 & & = 2\cdot 8 - 3(13-8) = 5\cdot 8 - 3\cdot 13 \\ 8 = 1\cdot 5+3 & & = 2(8-5) - 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot 5 \\ 5 = 1\cdot 3+2 & & = 3 - 5 + 3 = 2\cdot 3 - 5 \\ 3 = 1\cdot 2+1 & \rightsquigarrow & 1 = 3 - 2 \end{array}$$

cioè $1 = 13\cdot 21 - 8\cdot 34$, da cui $9999 = (9999\cdot 13)\cdot 21 - (9999\cdot 8)\cdot 34$. [Questo ultimo calcolo non è richiesto nel problema, ma poteva tornare utile nel caso vi si fosse chiesto il minimo sforzo per scrivere 9999 sulla lavagna.]

3 Il capitano è uno di 10, il consegnatore uno di 9, gli altri cinque sono tra otto, cioè una scelta tra $\binom{8}{5}$. In totale, le scelte sono $10\cdot 9\cdot\binom{8}{5} = 5040$.

4 Ogni sincero deve avere a fianco un sincero e un bugiardo. Del resto, un bugiardo a fianco di un sincero *deve* avere un altro sincero a fianco. Perciò ogni bugiardo ha a fianco due sinceri. I bugiardi sono la metà dei sinceri: 38.

5 Il percorso più breve passa per $(9-1)+(7-1) = 14$ incroci dove stabilire se andare a nord o a est: in sei di questi è necessario andare a est. I percorsi possibili corrispondono ai modi per scegliere sei elementi in un insieme di 14 elementi: $\binom{14}{6} = 3003$.

6 Se le copie della stessa lettera fossero colorate in modi diversi e, con questi colori, si distinguessero parole che differeiscono solo per il colore delle lettere, le parole possibili sarebbero 11!. Le parole che differiscono solo per i colori della lettera A sono sempre 3!, quelle che differiscono solo per i colori della lettera R sono 5!, e quelle che differiscono soltanto per i colori della lettera A sono 2!. Perciò le parole diverse che si possono scrivere con le lettere date sono $\frac{11!}{3!5!2!} = 27720$. Si può notare che il numero cercato è superiore a 10000 se si approssima il calcolo:

$$\frac{11!}{3!5!2!} = \frac{11!}{6!2} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2} \approx 3\cdot 10^4.$$

7 A parte il tronco, ogni coppia di rami biforcanti richiede un ramo su cui appoggiarsi. I rami che sonostengono biforcazioni sono $\dfrac{1777-1}{2} = 888$; gli altri sono $1777 - 888 = 889$. Il massimo numero di fiori è due volte il minimo che è uguale al numero dei rami che non sostengono una biforcazione.

8 Distribuire le sette palline significa associare ad ogni pallina il colore di una delle tre scatole, cioè costruire una funzione da un insieme di sette elementi ad un insieme di tre elementi. Le possibilità sono $3^7 = 2187$.