

PERCORSO

“ATTIVITÀ DI CONGETTURA E DIMOSTRAZIONE IN ARITMETICA E GEOMETRIA”

Il percorso è pensato per la classe seconda della scuola secondaria di primo grado, in continuità con le esperienze realizzate nella classe prima (percorso “Pensa un numero”).

Il percorso si articola in quattro parti (somma di numeri consecutivi, rettangoli isoperimetrici, teorema di Pitagora, numeri irrazionali), che possono essere svolte in sequenza o in momenti diversi dell’anno scolastico. Si consiglia in ogni caso di mantenere l’ordine suggerito, dal momento che alcuni passi importanti dei percorsi sono propedeutici alle fasi successive. Per esempio, le due attività “somma di numeri consecutivi” e “rettangoli isoperimetrici” sono introdotte anche per stabilire nella classe l’abitudine alla stesura di resoconti del percorso dimostrativo svolto, di modo da preparare il terreno per il percorso relativo al Teorema di Pitagora.

L’insegnante potrà anche scegliere di realizzare solo una parte del percorso. Si consiglia comunque di mantenere l’abbinamento tra somma di numeri consecutivi e rettangoli isoperimetrici, sia per consolidare, attraverso due esperienze, l’abitudine alla stesura dei resoconti, sia perché l’esperienza di congettura e dimostrazione in due ambiti diversi (aritmetica e geometria) fornisce importanti occasioni di confronto e riflessione.

PRIMA PARTE: SOMMA DI TRE NUMERI CONSECUTIVI

Gli studenti svolgono individualmente la scheda 1, poi in piccolo gruppo confrontano le congetture e giustificazioni prodotte e preparano una sintesi di gruppo da presentare nella successiva discussione di classe.

Nella successiva scheda 2, ogni studente è invitato a ricostruire la dimostrazione costruita (ricostruita) in discussione, con un esplicito invito a curare la giustificazione di ogni passaggio.

Inizia così un percorso di riflessione non solo sulla ricerca di giustificazioni accettabili, ma anche sulla sistemazione e comunicazione delle giustificazioni stesse. Infatti, se il percorso della classe prima è volto a far emergere un

atteggiamento argomentativo nello studente, il percorso della classe seconda vuole anche fare da ponte dall'argomentazione alla dimostrazione matematica.

Facoltativo: L'insegnante può raccogliere le schede 1 individuali, selezionare alcune produzioni significative (non necessariamente corrette) e proporre una scheda di **analisi dei testi**, introdotta dalla seguente consegna:

Considera le risposte fornite da alcuni dei tuoi compagni alle domande sulle somme di numeri consecutivi. Confrontale e scrivi le tue riflessioni:

- *Che cosa si può dire sulle proprietà trovate?*
- *Che cosa si può dire sulle spiegazioni presentate?*

Una successiva discussione di classe può fornire ulteriori elementi di riflessione sulla verità (accettabilità), comprensibilità e significatività delle congetture e sulla validità e comprensibilità della giustificazioni fornite. In particolare, la situazione si presta a riflessioni su linguaggio algebrico e linguaggio naturale come strumenti di pensiero.

SECONDA PARTE: RETTANGOLI ISOPERIMETRICI

Il percorso parte dall'esplorazione di una situazione geometrica (rettangoli aventi lo stesso perimetro) per arrivare alla scoperta del fatto che tra tutti i rettangoli isoperimetrici il quadrato è quello di area minima e alla relativa dimostrazione.

Il percorso dedica ampio spazio alla costruzione di rettangoli isoperimetrici in ambienti diversi (carta e matita, cartoncino) come attività preliminare alla ricerca di regolarità e come occasione per il recupero /consolidamento dei concetti di area e perimetro e come occasione per riflettere sul fatto che il quadrato è un particolare rettangolo.

L'insegnante può valutare, in relazione al livello della classe e ai contributi degli studenti, se inserire una discussione specifica su come, dato un rettangolo, costruirne un altro avente lo stesso perimetro.

Mediante una serie di attività complementari (disegni con carta e matita, ritaglio di cartoncini) gli studenti arrivano a formulare la congettura, poi l'insegnante propone una dimostrazione guidata della proprietà congetturata (*Tra tutti i rettangoli isoperimetrici, il quadrato è quello di area massima*).

Il discorso dell'insegnante, che accompagna la dimostrazione fatta alla lavagna, è volto a far cogliere agli studenti le peculiarità dell'attività dimostrativa (scelta delle rappresentazioni, scelta delle trasformazioni più opportune, ecc.). Successivamente, gli studenti sono chiamati a riflettere individualmente sul processo dimostrativo illustrato dall'insegnante, ricostruendo le motivazioni che stanno dietro i passi del ragionamento.

Infine, una scheda “di bilancio” invita a riflettere su quale tipo di lavoro è stato compiuto nei diversi contesti (carta e matita, cartoncino, algebra) e quale funzione (euristica, dimostrativa, ...) ha avuto tale attività.

Per facilitare la gestione della sequenza si riporta di seguito la sequenza della schede, con indicate le discussioni matematiche di raccordo e istituzionalizzazione previste a priori.

Scheda 1 (individuale): carta e matita: costruzione dei rettangoli

Scheda 2 (gruppi): confronto tra metodi di costruzione; ritaglio dei rettangoli su cartoncino

Discussione di classe sulle schede 1 e 2:

Scheda 3 (individuale): approfondimento sulla costruzione dei rettangoli. Dovrebbe riprendere quanto emerso nella discussione precedente, il testo può variare

Discussione di classe sulla scheda 3

Scheda 4 (gruppi): congettura sulle aree dei rettangoli isoperimetrici.

Discussione sulla scheda 4. In discussione, se non è emerso precedentemente: quale pensate che sia quello di area maggiore?

Passaggio alla dimostrazione guidata (che l'insegnante farà alla lavagna). A voce: “Abbiamo scoperto che, tra tutti i rettangoli aventi lo stesso perimetro, quello avente l'area maggiore è il quadrato.

Ora cercheremo di dimostrare la nostra congettura. La dimostrazione consiste in alcuni passaggi, noi la seguiremo passo dopo passo.. Cercate di seguire, al di là dei singoli passaggi, il “filo” del ragionamento.”

Scheda 7 (Individuale): ricostruzione del discorso metamatematico che accompagna la dimostrazione algebrica.

Scheda 9 (Individuale): scheda di bilancio e confronto tra metodi

Discussione conclusiva

TERZA PARTE: IL TEOREMA DI PITAGORA

Il percorso nella sua versione attuale è il risultato di diversi anni di sperimentazione e di scambio con un collèege francese. Le schede inizialmente concepite per la scuola francese (grado VIII) presupponevano (nella dimostrazione del teorema di Pitagora) la conoscenza dell'algebra, in particolare dello sviluppo del quadrato di un binomio. Nella situazione italiana, si è scelto di proporre l'attività in seconda (grado VII), come attività propedeutica all'introduzione dei numeri irrazionali (quarta parte del percorso). La scelta di proporre il percorso in seconda è dovuta alla volontà di far prima congetturare mediante esplorazione il teorema di Pitagora, che è già noto in terza. D'altro canto, però, in seconda il calcolo algebrico non è ancora stato trattato diffusamente (si veda a tale proposito il percorso relativo all'attività "Pensa un numero", che si configura, oltre che come attività di avvio all'argomentazione, come attività di avvio all'algebra), pertanto è stato necessario, nella dimostrazione guidata del teorema di Pitagora, introdurre, mediante riflessione guidata sull'equivalenza di aree, lo sviluppo del quadrato del binomio.

QUARTA PARTE: I NUMERI IRRAZIONALI

Il percorso inizia con la domanda: "*Quanti sono i punti di un segmento?*", introduce il concetto di commensurabilità ed incommensurabilità dei segmenti, propone una lettura critica del "Menone" sul problema della duplicazione del quadrato, conclude con l'introduzione dei numeri irrazionali.

Punti salienti di questa parte di percorso sono i collegamenti interdisciplinari, in particolare la lettura del dialogo platonico (eventualmente in forma recitata), a cui può seguire, con la collaborazione dei docenti di area umanistica, un approfondimento sulla maieutica socratica.